Θεώρημα Rolle.

Διατύπωση του θεωρήματος

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α, β] τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο [α, β]
- f παραγωγίσιμη στο (α, β)
- f(α) = f(β)

ΤΟΤΕ

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (α, β) τέτοιο ώστε: $f'(\xi)=0$.

Σημειώσεις:

1. Το **συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle** μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

i. η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια λύση (ρίζα) στο (α, β)

ii. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$ (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα $x'x$.

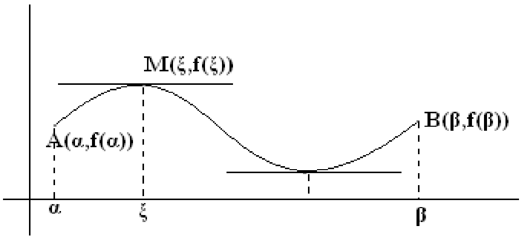
2. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] τότε ικανοποιούνται η δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος δηλ. f συνεχής στο [α, β] και f παραγωγίσιμη στο (α, β).

3. Το **<u>αντίστροφο</u>** του θεωρήματος **<u>δεν ισχύει</u>**.
Δηλ. για μια συνάρτηση f μπορεί να υπάρχει $\xi \in$(α, β) με $f'(\xi)=0$, χωρίς όμως να ισχύουν στο [α, β] κάποιες από τις προϋποθέσεις του Θ.Rolle

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x$ στο Δ=[0,3].
Η $f'(x)=2x-2$ έχει ρίζα το $1\in(0,3)$ ($f'(1)=0$) και $0=f(0)\neq f(3)=3$

Γεωμετρική σημασία του θεωρήματος

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in$(α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον οριζόντιο άξονα (τον $x'x$)



Χρήση του θεωρήματος

1. *Όταν ζητείται να εξετάσουμε αν για η συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό [α, β] ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle.*

Άμεση εφαρμογή του θεωρήματος

–Δείχνουμε ότι: η f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α)=f(β).

–Αν επιπλέον θέλουμε να βρούμε και τα $\xi \in$(α, β), την ύπαρξη των οποίων αποδείξαμε με το θεώρημα Rolle, λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$ στο (α, β).

2. *Όταν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση* ***f(x)=0*** *ή* ***g(x)=h(x)*** ⇔ ***f(x)=g(x)-h(x)*** *έχει: μία το πολύ στο R ή στο (α, β).*

Εργαζόμαστε με την εις άτοπο απαγωγή.

–Υποθέτουμε ότι η f(x) = 0 έχει δύο ρίζες, τις ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ (δηλαδή μία παραπάνω).

–Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ και έτσι εντοπίζουμε πόσες το πολύ ρίζες έχει η 1η παράγωγος $f'(x)$.

–Λύνουμε την εξίσωση $f'(x)=0$ και εντοπίζουμε τις ρίζες της 1ης παραγώγου.

–Τα δύο τελευταία βήματα μας οδηγούν στο άτοπο.

Σημείωση

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή 1-1 στο R (ή διάστημα Δ) τότε η εξίσωση f(x)=0 έχει μια το πολύ ρίζα στο R (ή στο Δ)

3. *Όταν ζητείται να δείξουμε ότι η* ***f(x)=0*** *ή* ***g(x)=h(x)*** ⇔ ***f(x)=g(x)-h(x)*** *έχει μία τουλάχιστον ρίζα. στο R ή στο (α, β).*

Εργαζόμαστε με το Θ. Bolzano ή με Rolle στην αρχική της f.
–Αρχικά δουλεύουμε με το Θ. Bolzano στο [α,β].
–Αν αυτό δεν εφαρμόζετε τότε εφαρμόζουμε Rolle στην αρχική της f δηλ. στην **F(x)**, όπου $F^{/}(x) = f(x)$.

4. *Όταν ζητείται να δείξουμε ότι η εξίσωση* ***f(x)=0*** *ή* ***g(x)=h(x)*** $\Leftrightarrow$ ***f(x)=g(x)-h(x)*** *έχει: ακριβώς μία, ακριβώς δύο ρίζες κ.τ.λ. στο R ή στο (α, β).*
Συνδυασμός των δύο προηγούμενων δηλ. (2) και (3).

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.)

Διατύπωση του θεωρήματος

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα [α,β] τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο [α,β]
- f παραγωγίσιμη στο (α,β)

ΤΟΤΕ

Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α,β) τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(a)}{\beta-a}$$

Σημείωση:

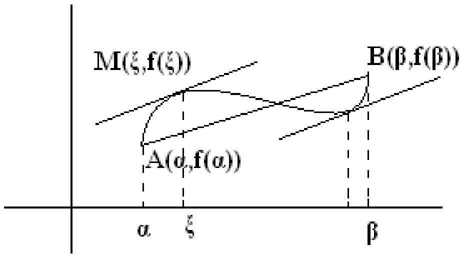
1. Το συμπέρασμα του Θ.Μ.Τ. μπορεί να διατυπωθεί και έτσι:

   υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈ (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο Μ(ξ,f(ξ)) είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ (όπου Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)).

2. Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] τότε ικανοποιούνται η δύο πρώτες προϋποθέσεις του θεωρήματος δηλ. f συνεχής στο [α,β] και f παραγωγίσιμη στο (α,β).

Γεωμετρική σημασία του θεωρήματος

Υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α,β) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της ευθεία της C_f στο Μ(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία ΑΒ



Χρήση του θεωρήματος

1. *Δίνεται συνάρτηση f ή συναρτήσεις f, g στο [α, β], σχέση μεταξύ f(α), f(β), g(α), g(β) και μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ξ ∈ (α, β) τέτοιο ώστε σ(ξ)=0*

   Από τα f(α), f(β), g(α), g(β) και την σ(ξ)=0 προσδιορίζουμε μια νέα συνάρτηση h(x) τέτοια ώστε h(α)=h(β), $h'(x)$ = σ(x) και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ.

2. *Απόδειξη ανισότητας δύο μεταβλητών x, y x<y.*

   –Από την μορφή της ανισότητας προσδιορίζουμε την συνάρτηση f στο [x, y].

   –Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την f στο [x, y] και υπολογίζουμε το $f'(ξ)$, με ξ ∈ (x,y) (α).

   –Από το ξ ∈ (x,y) ⇔ x < ξ < y και κατασκευαστικά ή με μονοτονία δημιουργούμε την ανισότητα που ικανοποιεί η f' (ξ) (β).

   –Συνδυάζοντας τα (α) και (β) καταλήγουμε στο ζητούμενο.

3. *Απόδειξη ανισότητας με μία μεταβλητή x για κάθε x∈ (α, β).*

   –Από την μορφή της ανισότητας προσδιορίζουμε την συνάρτηση y = f(t).

   –Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ σε διάστημα με άκρο το x δηλ. στο [α, x] ή [x,β].

4. *Προσέγγιση με ανισοτική σχέση της τιμής τριγωνομετρικού αριθμού ή της τιμής λογάριθμου γνωστού αριθμού.*

   –Από τη μορφή της σχέσης προσδιορίζουμε τη συνάρτηση και το διάστημα και εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ.

Στα επόμενα το διάστημα Δ είναι
οποιοδήποτε διάστημα της μορφής [ ], ( ), [ ) ή ( ] και όχι σε ένωση διαστημάτων.

f'(x) = 0 ⇔ f(x) = c

Διατύπωση του θεωρήματος

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ τέτοια ώστε:

- f συνεχής στο Δ
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

ΤΟΤΕ

Η f είναι σταθερή στο Δ, δηλ. $f(x) = c$, $c \in R$

Χρήση του θεωρήματος

1. *Δίνεται συνάρτηση f. Να αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή στο διάστημα Δ.*
   Αποδεικνύουμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$
2. *Να αποδείξουμε ότι ισχύει μια ταυτότητα στο διάστημα Δ.*
   –Φέρνουμε στο πρώτο μέλος όλους τους όρους το οποίο ονομάζουμε f(x).
   –Αποδεικνύουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

f'/(x) = g/ (x) ⇔ f(x) = g(x)+c

Διατύπωση του πορίσματος

Έστω μια συνάρτηση f, g ορισμένες στο διάστημα Δ τέτοιες ώστε:

- f ,g συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

ΤΟΤΕ

Η f και η g διαφέρουν κατά σταθερά δηλ. $f(x) = g(x)+c$, $c \in R$

Χρήση του θεωρήματος

1. *Ξέρουμε την παράγωγο f' και μια τιμή της f για κάποιο συγκεκριμένο x και θέλουμε την f(x)..*
   –Από την $f'(x)$ βρίσκουμε την $f(x) + c$
   –Από την τιμή της συνάρτησης υπολογίζουμε το c.
2. *Να αποδείξουμε ότι ισχύει μια ταυτότητα στο διάστημα Δ.*
   –Φέρνουμε στο πρώτο μέλος όλους τους όρους το οποίο ονομάζουμε f(x).
   –Αποδεικνύουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
3. *Να βρούμε τον τύπο της g αν ξέρουμε μια σχέση μεταξύ g και g' μαζί με μια γνωστή συνάρτηση όπως ημx, συνx, εφx, lnx, e^x κ.λ.π..*
   –Αν ονομάσουμε f την γνωστή συνάρτηση προσπαθούμε να μετασχηματίσουμε την σχέση στη μορφή $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)}{g(x)}$ ή $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g(x)$ ή $(h(g(x))' = (\varphi(f(x))'$
   –οπότε αντίστοιχα έχω $\frac{f(x)}{g(x)} = ce^x$ ή $f(x)\cdot g(x) = ce^x$ ή $h(g(x) = \varphi(f(x)+c$
   –προσδιορίζοντας το c βρίσκουμε την άγνωστη συνάρτηση g.

Ισχύει: Αν f'/(x) = f(x) τότε f(x) = c•ex