Η έννοια της πραγματικής συνάρτησης.

1. Ορισμός

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο Α (≠∅)** μια διαδικασία f, με την οποία σε κάθε στοιχείο x∈ A **αντιστοιχίζουμε** ένα μόνο πραγματικό αριθμό y (y ∈ R)
Τον αριθμό y τον ονομάζουμε **τιμή της f στο x** και τον συμβολίζουμε **f(x).**

Γράφουμε f: A →R

- f είναι το όνομα της συνάρτησης.
- Το σύνολο $A \subseteq R$ είναι το **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης το οποίο συμβολίζεται D_f.
- Κάθε $x \in A = D_f$ αντιστοιχίζεται **σε ένα και μόνο** ένα $y \in R$.
- Το στοιχείο $y = f(x)$ με $x \in A$ λέγεται **τιμή** ή **εικόνα** της f του x.
- Το $x \in A$ λέγεται **ανεξάρτητη** μεταβλητή και το $y = f(x)$ **εξηρτημένη** μεταβλητή.
- Το σύνολο $f(A) = \{y \in R |$υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)\}$ λέγεται **σύνολο τιμών** της f. Δηλ. το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο των εικόνων του $x \in A = D_f$

2. Συντομογραφία συνάρτησης

Μια συνάρτηση θεωρείται πλήρως (ή καλά) ορισμένη όταν δίνονται:

- Το πεδίο ορισμού της A.
- Η τιμή της $f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Πολλές φορές δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης, τότε είμαστε αναγκασμένοι να προσδιορίσουμε το πεδίο ορισμού της. Ως τέτοιο θεωρούμε το ευρύτερο υποσύνολο του R στο οποίο έχει νόημα ο τύπος της συνάρτησης.

Για την εύρεση του πεδίο ορισμού ακολουθούμε τους παρακάτω κανόνες:

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις όπως και οι συναρτήσεις **ημx, συνx** και **α**^{x} έχουν πεδίο ορισμού όλο το R.
- Οι παρονομαστές, αν υπάρχουν, θα πρέπει να είναι διαφορετικοί του μηδενός.
- Τα υπόρριζα, αν υπάρχουν, θα πρέπει να είναι μεγαλύτερα ή ίσα με το μηδέν.
- Όταν εμφανίζονται όροι της μορφής **lnφ(x)** θα πρέπει **φ(x)>0.**

Από τα παραπάνω «πρόβλημα» έχουμε όταν υπάρχουν ***παρανομαστές, υπόρριζα*** και ***λογάριθμοι.***

Γραφική παράσταση συνάρτησης (C_f)

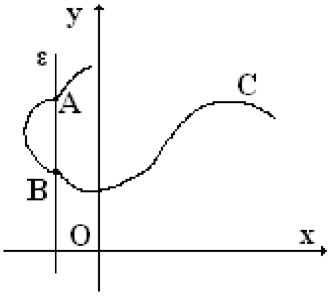
1. Γενικά

Έστω η συνάρτηση $f : A \to R$ και Oxy ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

- Γραφική παράσταση της f (C_f) λέμε το σύνολο των σημείων **M(x,y)** με **y=f(x)** και **x ∈ A.**
- Η γραφική παράσταση της f (C_f) έχει εξίσωση: **y=f(x).**
- Τα σημεία τομής της C_f. με τον x'x είναι της μορφής M(x,0),x∈A όπου οι τετμημένες x προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης : f(x)=0
- Τα σημεία τομής της C_f. με τον y'y είναι της μορφής M(0,y) όπου οι τεταγμένες y προκύπτουν θέτοντας x=0 δηλαδή y=f(0).
- Τα σημεία τομής $M(x_0, y_0)$ των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f και g βρίσκονται ως εξής: οι τετμημένες $x_0 \in D_f \cap D_g$ προκύπτουν από την λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ και οι τεταγμένες y_0 είναι οι εικόνες των x_0 μέσω της συνάρτησης f ή g.

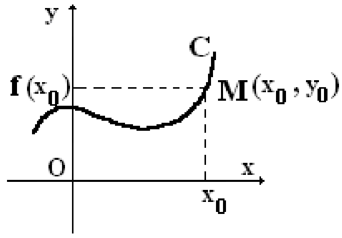
- Για να βρούμε την σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g υπολογίζουμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x)-g(x)$ με $x \in D_f \cap D_g$. Συγκεκριμένα:
  Αν $f(x)-g(x)$>0 τότε η C_f είναι ψηλότερα από την C_g
  Αν $f(x)-g(x)$<0 τότε η C_f είναι χαμηλότερα από την C_g
- Παρατηρήσεις

  - Αν η ευθεία $(\varepsilon)//y'y$ τέμνει την γραμμή (C) σε περισσότερα από ένα σημεία τότε η δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

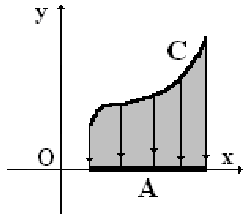


C_g

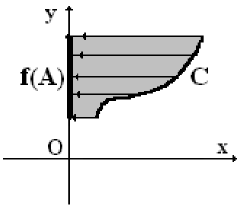
  - Αν $M(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$



  - Το πεδίο ορισμού A είναι το σύνολο των τετμημένων της C_f.
    Η προβολή της C_f στον άξονα x′x

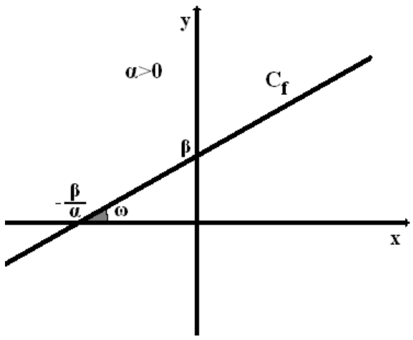


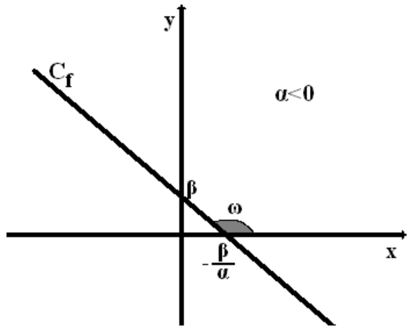
  - Το σύνολο τιμών f(A) είναι το σύνολο των τεταγμένων της C_f
    Η προβολή της C_f στον άξονα y′y

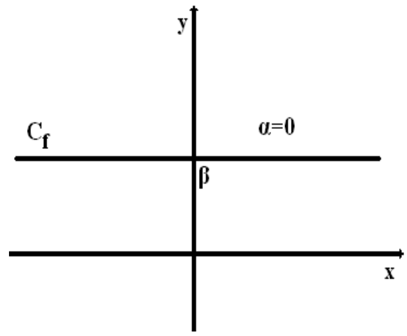


2. Γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων

1. Η ευθεία $f(x) = ax + \beta$

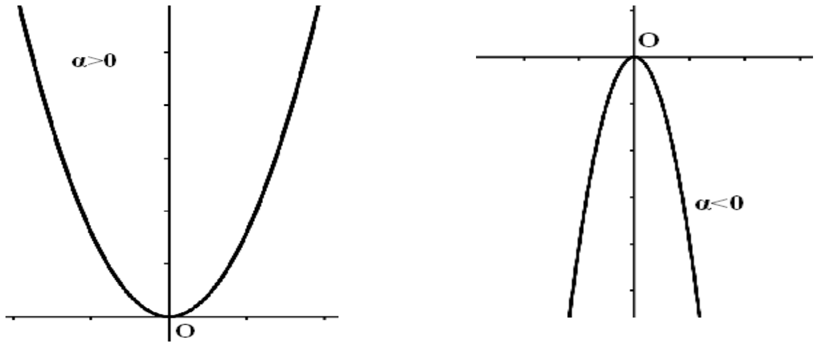






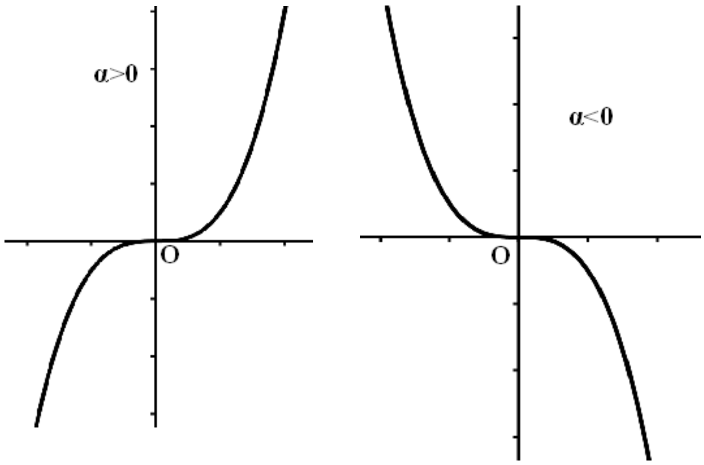
- Το πεδίο ορισμού της f είναι A=R
- Τα σύνολο τιμών της f είναι: $\begin{cases} f(A) = R, a \neq 0 \\ f(A) = \{\beta\}, a = 0 \end{cases}$
- Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία.
- Ο συντελεστής διεύθυνσης λ=α=εφω (ω ≠ 90^0) και δεν ορίζεται ο λ αν ω=90^0

2. Η παραβολή $f(x)=ax^2, a \neq 0$



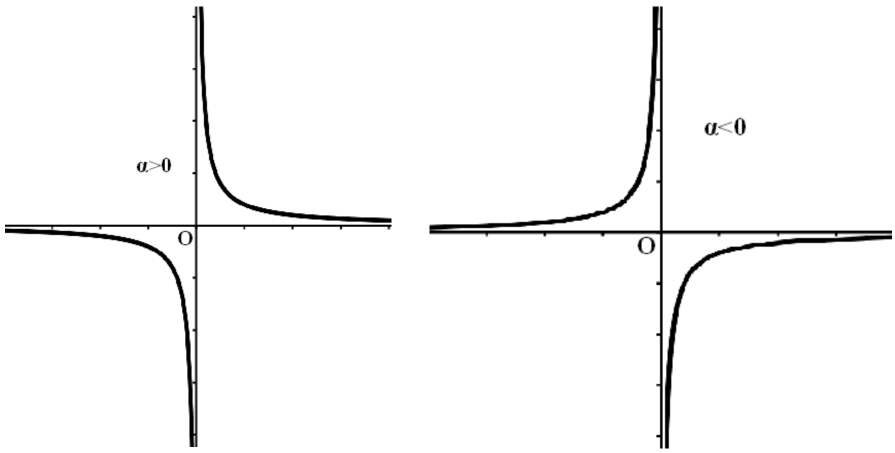
- Το πεδίο ορισμού της f είναι A=R
- Τα σύνολο τιμών της f είναι: $\begin{cases} f(A)=[0,+\infty), a>0 \\ f(A)=(-\infty,0], a<0 \end{cases}$
- Η γραφική της παράσταση είναι μια παραβολή με κορυφή το O(0,0).
- Η f είναι μια άρτια συνάρτηση.

3. Η $f(x)=ax^3, a \neq 0$



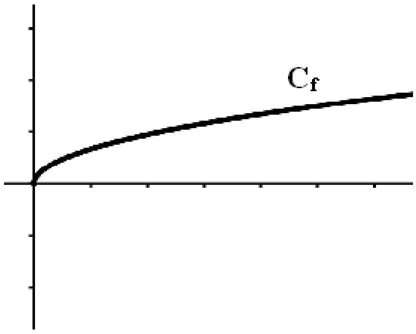
- Το πεδίο ορισμού της f είναι A=R
- Τα σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=R$
- Η f είναι μια περιττή συνάρτηση.

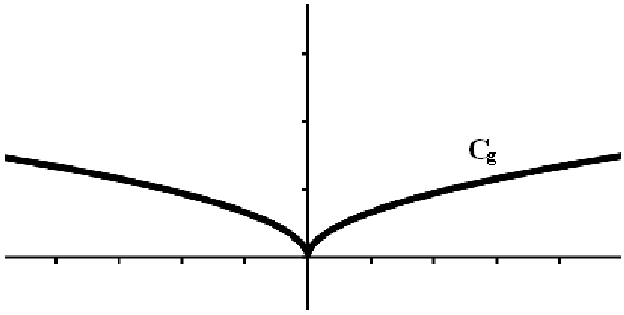
4. Η υπερβολή $f(x)=\frac{a}{x}, a \neq 0$



- Το πεδίο ορισμού της f είναι A=R*= $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
- Τα σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=$ $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$
- Η f είναι μια περιττή συνάρτηση
- Η γραφική της παράσταση είναι μια υπερβολή

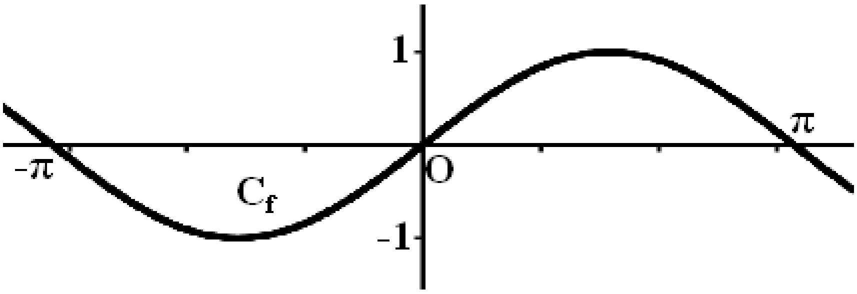
5. Οι άρρητες $f(x)=\sqrt{x}$ **και** $g(x)=\sqrt{|x|}$





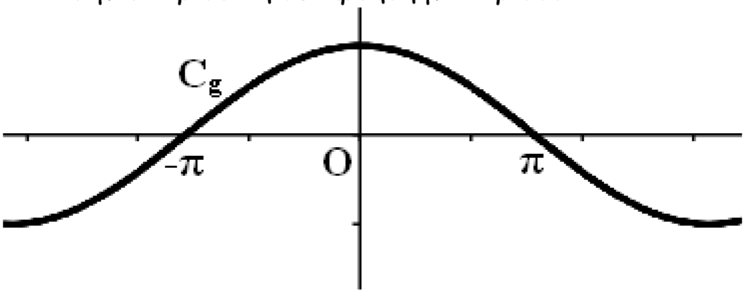
- Η f έχει **πεδίο ορισμού** και **σύνολο τιμών** A= $f(A)=[0,+\infty)$
- Η g έχει **πεδίο ορισμού** $A=R$ και **σύνολο τιμών** $f(A)=[0,+\infty)$. Η g είναι μια άρτια.

6. Οι τριγωνομετρικές $f(x)=$ **ημ** x **,** $g(x)=$ **συν** x **και** $h(x)=$ **εφ** x



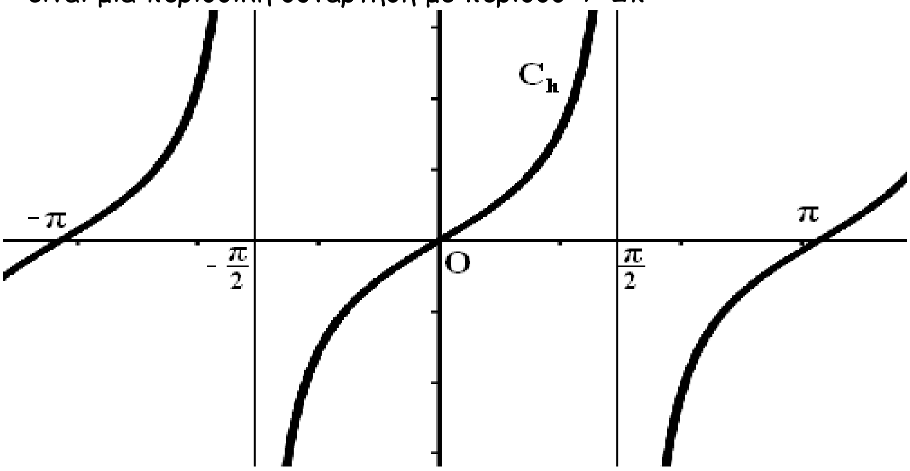
Η $f(x)=$ **ημ** x

- έχει πεδίο ορισμού $A=R$ και σύνολο τιμών $f(A)=[-1,1]$
- είναι μια περιττή συνάρτηση
- είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο Τ=2π



Η $g(x)=$ **συν** x

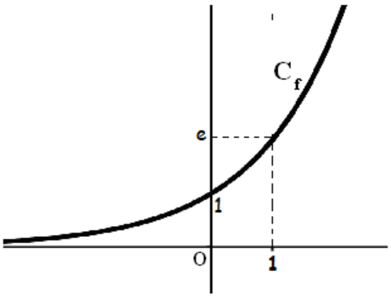
- έχει πεδίο ορισμού $A=R$ και σύνολο τιμών $g(A)=[-1,1]$
- είναι μια άρτια συνάρτηση
- είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο Τ=2π

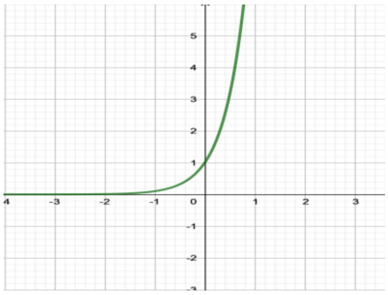


Η $h(x)=$ **εφ** x

- έχει πεδίο ορισμού $A=\left\{x\in R / x\neq \kappa\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in Z\right\}$ και σύνολο τιμών $h(A)=R$
- είναι μια περιττή συνάρτηση
- είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο Τ=π

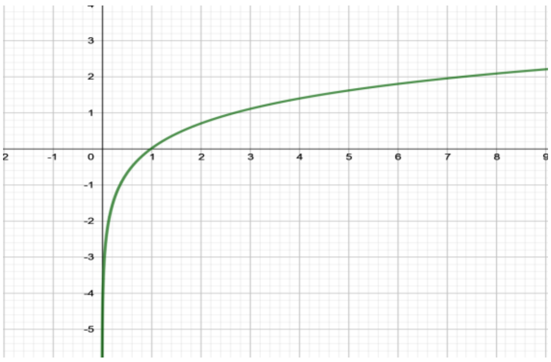
7. Οι $f(x)=e^x$ και η $g(x)=10^x$

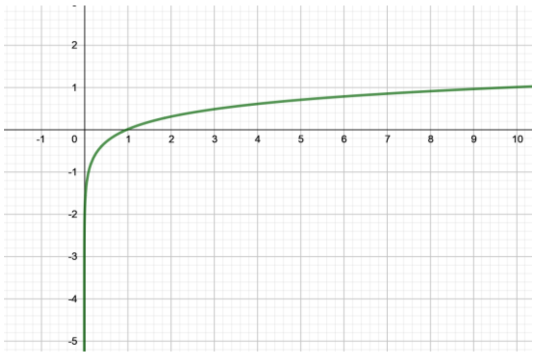




- Η f έχει πεδίο ορισμού $A=R$ και σύνολο τιμών $f(A)=(0,+\infty)$
- Ισχύει $\begin{cases} e^x<e^y \Leftrightarrow x<y \\ 10^x<10^y \Leftrightarrow x<y \end{cases}$
- Επίσης $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ και $10^x=10^y \Leftrightarrow x=y$

8. Οι $f(x)=\ln x$ και η $g(x)=\log x$

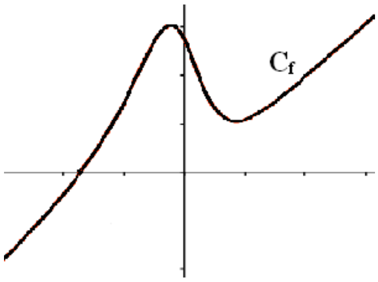




- Η f έχει πεδίο ορισμού $A=(0,+\infty)$ και σύνολο τιμών $f(A)=R$
- Η μορφή της C_f εξαρτάται από την βάση α της εκθετικής (α>1 ή 0<α<1)
- Ισχύει $\begin{cases} \ln x<\ln y \Leftrightarrow x<y \\ \log x<\log y \Leftrightarrow x<y \end{cases}$
- Επίσης $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$ και $\log x=\log y \Leftrightarrow x=y$
- Ιδιότητες λογαρίθμων:
  - $\ln 1=0$ και $\log 1=0$, $\ln e=1$ και $\log 10=1$
  - $\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x$ και $\log x=y \Leftrightarrow 10^y=x$
  - $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$ και $\log(x\cdot y)=\log x+\log y$
  - $\ln\frac{x}{y}=\ln x-\ln y$ και $\log\frac{x}{y}=\log x-\log y$
  - $\ln x^\kappa=\kappa\ln x$ και $\log x^\kappa=\kappa\log x$
  - $\ln\sqrt[\kappa]{x}=\frac{1}{\kappa}\ln x$ και $\log\sqrt[\kappa]{x}=\frac{1}{\kappa}\log x$
  - $a^x=e^{x\ln a}$ γιατί $a=e^{\ln a}$
  - $[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}$ με $f(x)>0$

3. Η γρ. παράσταση των –f(x), |f(x)|, f(x+α), f(x)+c

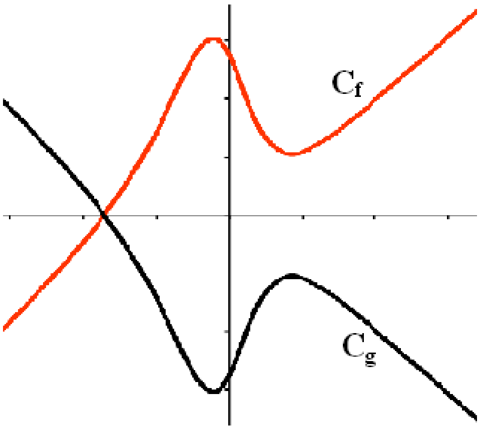
Έστω C_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f



1. $g(x) = -f(x)$

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε:
την C_f γραφική παράσταση της $f(x)$ και
την C_g γρ. παράσταση της $g(x) = -f(x)$.

<u>**Παρατηρούμε**</u> ότι οι δύο γρ. παραστάσεις είναι συμμετρικές ως προς τον $x'x$.

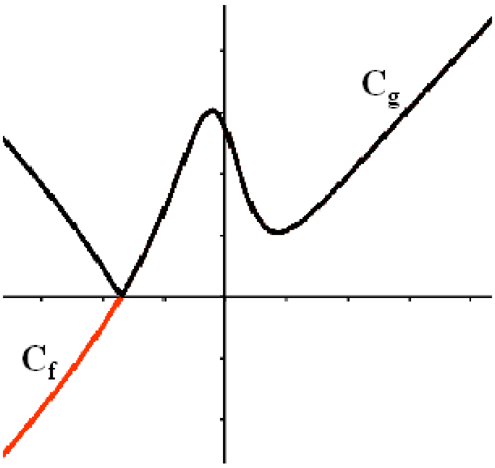


2. $g(x) = |f(x)|$

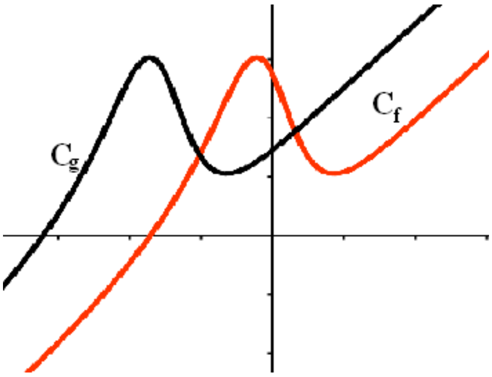
Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε:
την C_f γραφική παράσταση της $f(x)$ και
την C_g γρ. παράσταση της $g(x) = |f(x)|$.

<u>**Παρατηρούμε**</u> ότι η γρ. παράσταση της g (C_g) αποτελείται από:

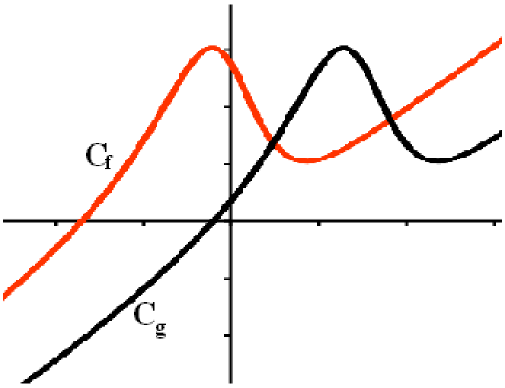
- τα τμήματα της C_f που είναι πάνω από τον $x'x$ και
- τα συμμετρικά ως προς των $x'x$ των τμημάτων της C_f που είναι κάτω από τον $x'x$.



3. $g(x) = f(x+a)$



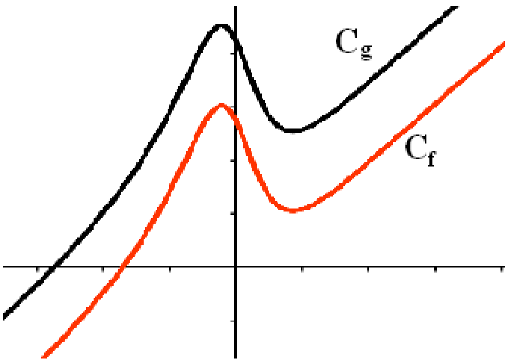
Στο διπλανά σχήματα βλέπουμε:
την C_f γραφική παράσταση της $f(x)$ και
την C_g γρ. παράσταση της $g(x) = f(x+a)$
.



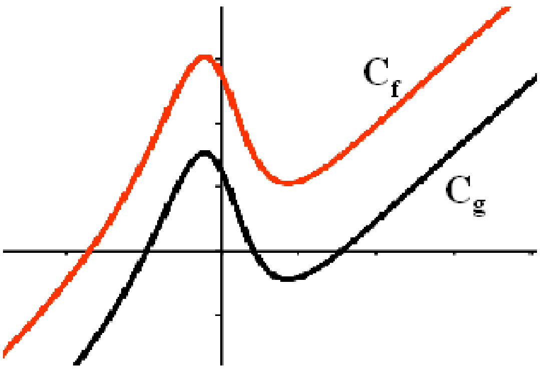
__Παρατηρούμε__ ότι η γρ. παράσταση της g (C_g) προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f κατά α μονάδες:

- αριστερά αν το α>0 (πάνω σχήμα)
- δεξιά αν το α<0 (κάτω σχήμα)

4. $g(x) = f(x) + c$



Στο διπλανά σχήματα βλέπουμε:
την C_f γραφική παράσταση της $f(x)$ και
την C_g γρ. παράσταση της $g(x) = f(x) + c$.



__Παρατηρούμε__ ότι η γρ. παράσταση της g (C_g) προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της C_f κατά c μονάδες:

- πάνω αν το c>0 (πάνω σχήμα)
- κάτω αν το c<0 (κάτω σχήμα)

Ισότητα συναρτήσεων

1. Ορισμός

Δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες (f = g)όταν:

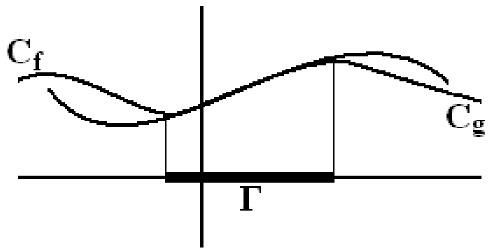
- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x ∈ A

2. Παρατηρήσεις:

- Δύο ίσες συναρτήσεις έχουν την ίδια γραφική. παράσταση.
- Η πρόταση «δύο συναρτήσεις είναι ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο» είναι ***λάθος***.
  Παράδειγμα οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$ ορισμένες στο σύνολο $A = \{0,1\}$ είναι ίσες παρόλο που δεν έχουν τον ίδιο τύπο.

3. Ισότητα σε κοινό υποσύνολο των πεδίων ορισμού τους

Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to R$, $g : B \to R$ και $\Gamma \subseteq A \cap \mathrm{B}$. Αν f(x)=g(x) για κάθε x ∈ Γ τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες στο Γ. (βλέπε διπλανό σχήμα)



Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι γραφικές παραστάσεις τους συμπίπτουν για κάθε x ∈ Γ.

Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

1. Αθροισμα-Διαφορά – Γινόμενο-Πηλίκο συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to R$, $g : B \to R$. Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις:

- f+g (άθροισμα) με τύπο: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και πεδίο ορισμού $\Gamma = A \cap \mathrm{B}$.
- f-g (διαφορά) με τύπο: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ και πεδίο ορισμού $\Gamma = A \cap \mathrm{B}$.
- f·g (γινόμενο) με τύπο: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ και πεδίο ορισμού $\Gamma = A \cap \mathrm{B}$.
- $\frac{f}{g}$ (πηλίκο) με τύπο: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και πεδίο ορισμού $\Gamma = \{x \in A \cap \mathrm{B} / g(x) \neq 0\}$.

Σε κάθε περίπτωση, για να ορίζεται η αντίστοιχη πράξη, θα πρέπει $\Gamma \neq \emptyset$,.

2. Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω οι συναρτήσεις $f : D_f \to R$, $g : D_g \to R$. Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις:

- $g \circ f$ με τύπο $g \circ f(x) = g(f(x))$ και πεδίο ορισμού
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \ / \ f(x) \in D_g\} \neq \emptyset$$
- $f \circ g$ με τύπο $f \circ g(x) = f(g(x))$ και πεδίο ορισμού
$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \ / \ g(x) \in D_f\} \neq \emptyset$$
- Για να ορίζεται
  ✓ η $g \circ f$ θα πρέπει $f(\mathrm{A}) \cap D_g \neq \emptyset$

✓ $f \circ g$ θα πρέπει $g(\mathrm{A}) \cap D_f \neq \varnothing$

Επιπλέον:

- Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f \circ f$ με τύπο $f \circ f(x) = f(f(x))$ και πεδίο ορισμού $D_{f \circ f} = \{x \in D_f \,/\, f(x) \in D_f\} \neq \emptyset$
- Δεν ισχύει η **αντιμεταθετική** ιδιότητα στην σύνθεση: δηλ $f \circ g \neq g \circ f$
- Ισχύει η **προσεταιριστική** ιδιότητα στην σύνθεση: δηλ. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Άρτια – Περιττή – Περιοδική συνάρτηση

Έστω η συνάρτηση $f : A \to R$.

1. Άρτια

Η συνάρτηση f θα λέγεται **άρτια** αν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

- και το $-x \in A$ (δηλ. το A είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν)
- $f(-x) = f(x)$

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$

2. Περιττη

Η συνάρτηση f θα λέγεται **περιττή** αν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

- και το $-x \in A$ (δηλ. το A είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν)
- $f(-x) = -f(x)$

Η γρ. παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το O(0,0)

3. Περιοδική

Η συνάρτηση f θα λέγεται **περιοδική** με **περίοδο T≠0** αν για κάθε $x \in A$ ισχύουν:

- και τα $x + T \in A$, $x - T \in A$
- $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$

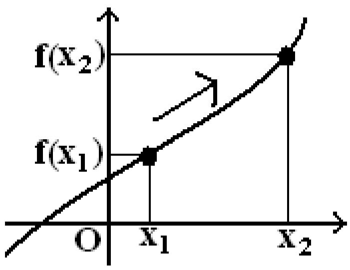
Η γρ. παράσταση μια περιοδικής συνάρτησης επαναλαμβάνεται ανά διαστήματα T.

Μονοτονία συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.

1. Γνησίως Αύξουσα

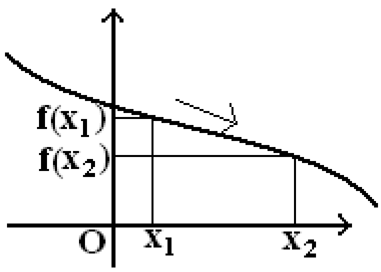
Η f λέγεται **γνησίως αύξουσα στο Δ,** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.



Η γραφική παράσταση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης **«ανεβαίνει»** από τα αριστερά προς τα δεξιά.

2. Γνησίως Φθίνουσα

Η f λέγεται **γνησίως φθίνουσα στο Δ,** αν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.



Η γραφική παράσταση μιας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης **«κατεβαίνει»** από τα αριστερά προς τα δεξιά.

- *Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στ πεδίο ορισμού της τότε λέγεται* ***<u>γνησίως μονότονη</u>***.

- Παρατηρήσεις.
  - Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Α τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **το πολύ μία ρίζα** στο Α.
  - Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο Α τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa \in R$ έχει **το πολύ μία ρίζα** στο Α.
  - Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2, αλλά να μην είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$. Για παράδειγμα η υπερβολή $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=(-\infty,0)$ και $\Delta_2=(0,+\infty)$ αλλά δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.
  - Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στα διαστήματα (α,γ] και [γ,β) τότε είναι γνησίως αύξουσα (ή γνησίως φθίνουσα) στο διάστημα (α,γ).

Ακρότατα συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση $f:A\to R$ και $x_0\in A$. Το $f(x_0)$ θα λέγεται:

- **μέγιστο** όταν $f(x_0)\geq f(x)$ για κάθε $x\in A$.
- **ελάχιστο** όταν $f(x_0)\leq f(x)$ για κάθε $x\in A$.
- Παρατηρήσεις:
  - Το ελάχιστο και το μέγιστο, αν υπάρχουν, λέγονται **ακρότατα**
  - Αν $f(x)\leq M$ για κάθε $x\in A$, τότε **δεν μπορούμε** να πούμε ότι το Μ είναι *οπωσδήποτε* μέγιστο της f. Για να είναι το Μ μέγιστο θα πρέπει επιπλέον να υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=M$.

    (Αντίστοιχα σκεφτόμαστε για το ελάχιστο).
  - Αν το σύνολο τιμών $(f(A))$ της $f:A\to R$ είναι **κλειστό** τότε το αριστερό άκρο είναι το **ελάχιστο** της f, και το δεξί άκρο είναι το **μέγιστο** της f.

Συνάρτηση 1-1

Έστω μια συνάρτηση $f:A\to R$ λέγεται **1-1 (ένα προς ένα)** όταν:

\# για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $x_1\neq x_2$ να ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$

ή εναλλακτικά

\# για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ να ισχύει $x_1=x_2$.

δηλαδή:

\# σε κάθε $x\in A$ αντιστοιχίζετε ένα $y\in f(A)$ **και**

σε κάθε $y\in f(A)$ αντιστοιχίζετε ένα $x\in A$.

Συνάρτηση 1-1 και γραφική παράσταση

Αν η f είναι 1-1 τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον $x'x$ τέμνει την C_f σε ένα το πού σημείο.

Παρατηρήσεις:

- Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι και 1-1.

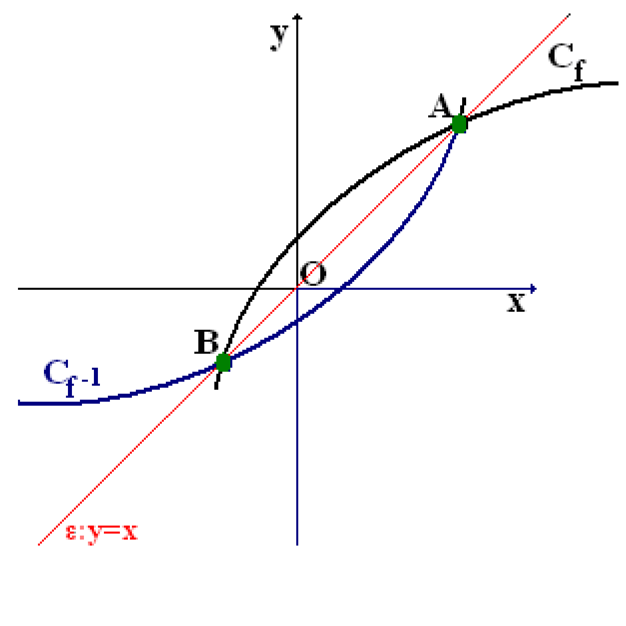
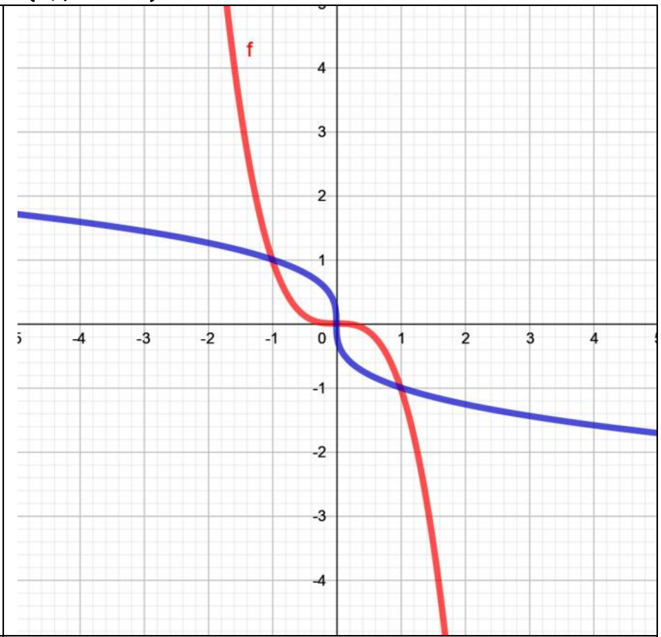
  Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει **το πολύ μία ρίζα**.
- Αν μια συνάρτηση f είναι 1-1 τότε η εξίσωση $f(x)=\kappa$ έχει **το πολύ μία ρίζα**.

Αντίστροφη συνάρτηση

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to R$. **Αν η f είναι 1-1** τότε ορίζεται η συνάρτηση:
$f^{-1}: f(A) \to R$ και η οποία λέγεται αντίστροφη της f.

- Παρατηρήσεις.
    - $f: A \to f(A)$ και $f^{-1}: f(A) \to A$
    - $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ για κάθε $x \in A$
    - $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$
    - $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ για κάθε $x \in A$ και $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ για κάθε $y \in f(A)$
    - Οι γραφικές παραστάσεις C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x$.
    - Οι f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.
- Τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = x$ <u>**μόνο**</u> όταν η είναι γνησίως αύξουσα (σχέδιο 1).

  Αν είναι γνησίως φθίνουσα τότε μπορεί …. (σχέδιο 2)

	
Σχέδιο 1	**Σχέδιο 2**