Για να αποδείξουμε ανισότητες στα ολοκληρώματα, χρησιμοποιούμε:

1. Τις βασικές ανισότητες:

i. $|\eta\mu x| \le |x|, x \in R$ ή $-|x| \le \eta\mu x \le |x|$, $x \in R$ (το = να ισχύει μόνο για **x=0**). Άρα $\eta\mu x < x \quad \forall x > 0$

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \eta\mu x^2 \; dx < \frac{1}{3}$

Για κάθε x ≥ 0 ισχύει $\eta\mu x \le x$ και το = ισχύει μόνο για x=0. Όποτε $\eta\mu x^2 \le x^2 \quad \forall x \in [0,1]$ και

το = ισχύει μόνο για $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επομένως $\int_0^1 \eta\mu x^2 \; dx < \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

ii. $\ln x \le x-1, x>0$ (το = να ισχύει μόνο για **x=1**).

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \ln(1+x^2) \; dx < \frac{1}{3}$

Για κάθε x > 0 ισχύει $\ln x \le x-1$ και το = ισχύει μόνο για x=1. Θέτουμε όπου x το $1+x^2 > 0$

Όποτε $\ln(1+x^2) \le 1+x^2-1 = x^2 \quad \forall x \in R$ και το = ισχύει μόνο για $1+x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Επομένως $\int_0^1 \ln(1+x^2) \; dx < \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

iii. $e^x \ge x+1, x \in R$ (το = να ισχύει μόνο για **x=0**).

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 e^{x^2} \; dx > \frac{4}{3}$.

Για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x \ge x+1$ και το = ισχύει μόνο για x=0. Θέτουμε όπου x το e^{x^2}

Όποτε $e^{x^2} \ge x^2+1 \quad \forall x \in R$ και το = ισχύει μόνο για $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Επομένως

$$\int_0^1 e^{x^2} \; dx > \int_0^1 (x^2+1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

2. Κυρτότητα και εφαπτόμενη:

i. Αν f κυρτή και y=λx+β η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε $f(x) \ge \lambda x + \beta$.

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \ln\frac{1+e^x}{2} \; dx > \frac{1}{4}$

Η $f(x) = \ln\frac{1+e^x}{2}$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη

στο R με $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0, x \in R$. Επομένως η f **είναι κυρτή στο R**. (1)

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι $\varepsilon: y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0)$ με $f(0) = 0$

και $f'(0) = \frac{1}{2}$. Άρα $\varepsilon: y = \frac{1}{2}x$.(2)

Από (1) και (2) έχω ότι $f(x) \ge \frac{1}{2}x$ για κάθε x єR και το = ισχύει μόνο για x=0. Επομένως

$$\int_0^1 \ln\frac{1+e^x}{2} \; dx > \int_0^1 \frac{1}{2} x dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ii. Αν f κοίλη και y=λx+β η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε $f(x) <= \lambda x+\beta$

Να αποδειχθεί ότι $\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\ dx < \frac{3}{2}$

Η $f(x)=\sqrt{2-x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ με $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ με $f''(x)=-\frac{\sqrt{2-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2}<0, x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$.

Επομένως η f **είναι κοίλη στο** $\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. (1)

Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι $\varepsilon: y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$ με $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$. Άρα $\varepsilon: y=-x+2$.(2)

Από (1) και (2) έχω ότι $f(x)\le -x+2$ για κάθε x ε$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ και το = ισχύει μόνο για x=1.

Επομένως $\int_0^1 \sqrt{2-x^2}\ dx < \int_0^1 (-x+2)dx = \left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 = \frac{3}{2}$

3. Θ.Μ.Τ. και μονοτονία πρώτης παραγώγου (f′):

Έστω κυρτή συνάρτηση $f: R\to R$ με f(0)=0.Να αποδειχθεί ότι:
α) $f(x)\le x\cdot f'(x)$, για κάθε x ≥ 0 και β) $\int_0^1 f(x)\ dx < \frac{f(1)}{2}$

α)Για x=0 έχουμε $f(0)\le 0\cdot f'(0)$, που ισχύει ως ισότητα

Για κάθε x > 0 θα δείξουμε ότι $f(x) < xf'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0} < f'(x)$.

Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο [0,x], x >0, αφού είναι συνεχής στο [0,x] και παραγωγίσιμη στο (0,x). Συνεπώς υπάρχει ξ ε (0,x) τέτοιο ώστε

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)}{x}$ (1)

Αφού $\begin{cases} \xi\in(0,x) \Leftrightarrow \xi<x \\ f\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta} \Leftrightarrow f'\uparrow \end{cases} \Rightarrow f'(\xi)<f'(x)$ και από (1) $\frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) < x\cdot f'(x)$

β)Για κάθε $x\in[0,1]\subseteq[0,+\infty)$ από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε $f(x)\le x\cdot f'(x)$ και το = ισχύει μόνο για x=0. Επομένως:

$\int_0^1 f(x)\ dx < \int_0^1 x\cdot f'(x)dx = \left[x\cdot f(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x'\cdot f(x)dx = f(1)-\int_0^1 f(x)dx$. Δηλαδή

$\int_0^1 f(x)\ dx < f(1)-\int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx < f(1) \Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx < \frac{f(1)}{2}$

4. Μονοτονία της συνάρτησης f και τη σχέση α≤x≤β:

Να αποδειχθεί ότι $1<\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\ dx<\sqrt{2}$

Η $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$ για κάθε $x\in(0,1]$ και

επειδή f συνεχής στο 0 έχουμε ότι f γνησίως αύξουσα στο [0,1].

Οπότε $x\in[0,1]\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le\sqrt{2}$. Το = της ανισότητας

$1\le f(x)$ ισχύει μόνο για x=0 και το = της ανισότητας $f(x)\le\sqrt{2}$ ισχύει μόνο για x=1.

Άρα $\int_0 1dx<\int_0^1\sqrt{x^2+1}\ dx<\int_0^1\sqrt{2}dx\Leftrightarrow[x]_0^1<\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx<\left[\sqrt{2}x\right]_0^1\Leftrightarrow 1<\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx<\sqrt{2}$.

5. minf≤f(x)≤maxf με x∈[α,β]:

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3. f.
Να αποδειχθεί ότι: $\dfrac{4}{3}<\int_0^2 f(x)\ dx\cdot\int_0^2\dfrac{1}{f(x)}dx<12$

Για κάθε $x\in[0,2]$ έχουμε $1\le f(x)\le 3$ (1) οπότε $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 1$ (2).

Επειδή minf < maxf τα = δεν ισχύουν για κάθε $x\in[0,2]$.

Άρα: η (1) $\Rightarrow\ \int_0^2 dx<\int_0^2 f(x)dx<3\int_0^2 dx\ \Rightarrow\ [x]_0^2<\int_0^2 f(x)dx<3[x]_0^2\ \Rightarrow\ 2<\int_0^2 f(x)dx<6$ (3)

η (2) $\Rightarrow\ \dfrac{1}{3}\int_0^2 dx<\int_0^2\dfrac{1}{f(x)}dx<\int_0^2 dx\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{3}[x]_0^2<\int_0^2\dfrac{1}{f(x)}dx<[x]_0^2\ \Rightarrow\ \dfrac{2}{3}<\int_0^2\dfrac{1}{f(x)}dx<2$ (4)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) & (4) έχουμε: $\dfrac{4}{3}<\int_0^2 f(x)\ dx\cdot\int_0^2\dfrac{1}{f(x)}dx<12$