Α. Πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

Όριο και πλευρικά όρια:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} = l$$

Χρησιμοποιούμε, οπωσδήποτε, πλευρικά όρια αν η συνάρτηση αλλάζει τύπο εκατέρωθεν του x_0

Συνέπεια του ορισμού του ορίου:

i. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - l) = 0$

ii. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = l$

Όριο και Διάταξη:

i. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ ➡ $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$ ➡ $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

και

ii. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$ ➡ $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0.

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$ ➡ $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0.

Όμως

i. Αν η f $\begin{cases} \text{έχει όριο στο } x_0 \\ \text{και ισχύει κοντά στο } x_0 \\ f(x) < 0 \ (f(x) > 0) \end{cases}$ ➡ $\lim_{x\to x_0} f(x) \le 0 \left(\lim_{x\to x_0} f(x) \ge 0\right)$

ii. Αν $\begin{cases} \text{οι } f, g \text{ έχουν όριο στο } x_0 \\ \text{και ισχύει κοντά στο } x_0 \\ f(x) < g(x) \ [f(x) > g(x)] \end{cases}$ ➡ $\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x) \left[\lim_{x\to x_0} f(x) \ge \lim_{x\to x_0} g(x)\right]$

Κριτήριο παρεμβολής

Αν $\begin{cases} h(x) \le f(x) \le g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \\ \text{και} \\ \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \end{cases}$ ➡ $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

Όρια και πράξεις

Με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ τότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, **εφόσον** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$ ειδικά ισχύει Ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, **εφόσον** $f(x) \geq 0$ $\textit{κοντά στο}$ x_0
- $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ $,\lambda \in \mathbb{R}$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να δούμε τα όρια των βασικών συναρτήσεων

1. Σταθερή συνάρτηση $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$

   $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$

2. Ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$

   $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$

3. Πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 x + a_0$

   $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$

4. Ρητή συνάρτηση $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$, όπου $P(x)$ και $R(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις

   $\lim\limits_{x\to x_0} Q(x) = Q(x_0)$ **εφόσον** $R(x_0) \neq 0$

5. Τριγωνομετρικές συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x,\ g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ h(x) = \varepsilon\varphi x$

   $\lim\limits_{x\to x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu x_0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0$

όμως

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1, \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x} = 1 \text{ και } \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\eta\mu\varphi(x)}{\varphi(x)} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha x-1}{\alpha x}=0 \text{ και } \lim_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\varphi(x)-1}{\varphi(x)}=0$$

και

Αν $\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \\ \text{και} \\ a\le g(x)\le \beta \text{ κοντά στο } x_0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=0$

Δηλ. (μηδενική συνάρτηση) Χ (φραγμένη συνάρτηση) = (μηδενική συνάρτηση)

(δεν αναφέρεται στο σχολικό – η απόδειξη γίνεται με κριτήριο παρεμβολής)

6. Εκθετικές και Λογαριθμικές συναρτήσεις $f(x)=e^x$, $g(x)=lnx$

$\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$ και γενικά $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$

$\lim\limits_{x\to x_0} lnx = lnx_0$ και γενικά $\lim\limits_{x\to x_0} log_a x = log_a x_0$

Β. Μη Πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

Όριο και πλευρικά όρια:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} = -\infty$$

Όριο και Διάταξη:

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ➡ $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ➡ $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.
- Αν $f(x) \leq g(x)$ κοντα στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ ➡ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ / $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Όρια και πράξεις

1. Όριο Αθροίσματος

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$		$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + m$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	

2. Όριο Γινομένου

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$m \in \mathbb{R}$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)]$	$l\,m$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$		$-\infty$		?

3. Όριο Πηλίκου

- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$
- Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\begin{cases} f(x)>0 \quad \text{κοντά στο } x_0 \text{ τότε } \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty \\ f(x)<0 \quad \text{κοντά στο } x_0 \text{ τότε } \lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=-\infty \end{cases}$

4. Όριο και απόλυτη τιμή

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|=|l|$

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$

5. Όριο ρίζας

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l\in\mathbb{R}$ και $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=\sqrt[k]{l}$
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)}=+\infty$

Γ. Όρια συνάρτησης στο άπειρο: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$

1. Για το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0

Με την προϋπόθεση ότι δεν προκύπτει απροσδιόριστη μορφή

2. Βασικά όρια

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\nu = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{vmatrix} +\infty, \nu = 2\kappa & (\nu \text{ άρτιος}) \\ -\infty, \nu = 2\kappa+1 & (\nu \text{ περιτος}) \end{vmatrix}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} = 0$

3. Πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-2}x^{\nu-2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (a_\nu x^\nu) = a_\nu \lim_{x\to\pm\infty} (x^\nu) = \cdots = \pm\infty$$

4. Ρητή συνάρτηση $Q(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$, όπου $P(x)$ και $R(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{R(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu} = \frac{a_\nu}{\beta_\mu} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^\nu}{x^\mu} = \begin{vmatrix} \pm\infty & ,\nu > \mu \\ a_\nu/\beta_\mu, & \nu = \mu \\ 0 & ,\nu > \mu \end{vmatrix}$$

5. Τριγωνομετρικά όρια

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\eta\mu x}{x^\nu} = 0$ και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^\nu} = 0$ (απόδειξη με κριτήριο παρεμβολής)

6. Εκθετικές συναρτήσεις

- Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
- Αν α>1 τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$
- Αρα $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

7. Λογαριθμικές συναρτήσεις

- Αν 0<α<1 τότε $\lim\limits_{x\to0} \log_a x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$
- Αν α>1 τότε $\lim\limits_{x\to0} \log_a x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$
- Αρα $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$