ΑΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΤΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Απροσδιόριστες μορφές είναι:

$$-\infty+\infty,\qquad 0\cdot(\pm\infty),\qquad \frac{0}{0},\qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\qquad 0^0,\qquad 1^\infty,\qquad \infty^0$$

Τι σημαίνει απροσδιόριστη μορφή;

Απροσδιόριστη μορφή σημαίνει ότι το αποτέλεσμα του ορίου δεν είναι μονοσήμαντο.

Μελετήστε τα δύο παρακάτω παραδείγματα.

- $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

  Όμως $\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$

- $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$ απροσδιοριστία.

  Όμως $\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2.$

  Άρα $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$

Δηλαδή, ενώ και τα δύο όρια καταλήγουν στην *ίδια απροσδιοριστία* $\frac{0}{0}$ στο πρώτο παράδειγμα το όριο είναι ίσο με 2, ενώ στο δεύτερο είναι 4.

Συμπέρασμα:

Καταλήγοντας σε μια απροσδιόριστη μορφή, **δεν σημαίνει ότι το όριο αναγκαστικά δεν υπάρχει.** Θα πρέπει, λοιπόν, να αναζητήσουμε το συγκεκριμένο όριο με κάποιο άλλο τρόπο και όχι στηριζόμενοι στις πράξεις μεταξύ των ορίων.

Πως λοιπόν αντιμετωπίζουμε τις απροσδιοριστίες;

Απροσδιορίστία 1η: $\frac{0}{0}$

1. Ρητή Συνάρτηση

Παραγοντοποιούμε (με Hortner ή με άλλη μέθοδο) αριθμητή και παρονομαστή ώστε να εμφανιστή ο παράγοντας που μηδενίζεται δηλ. τον $x-x_0$ και τον απλοποιούμε.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to3}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x-2}{x}=\frac{3-2}{3}=\frac{1}{3}$$

2. Άρρητη Συνάρτηση

Πολλαπλασιάζω τους όρους του κλάσματος με την συζυγή παράσταση του άρρητου όρου.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{(\sqrt{x+5}+3)}=\frac{1}{6}$$

3. Συνάρτηση με απόλυτα

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα προσήμων ή υπολογίζοντας το όριο για την (τις) παράσταση που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο, και

- αν το x_0 **δεν** είναι ρίζα κάποιας παράστασης απολύτου βγάζουμε τα απόλυτα

$$\lim_{x\to1}\frac{|x^2+x-3|-|x-2|}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)\ (α)$$

Επειδή $\lim_{x\to1}(x^2+x-3)$=1+1-3=-1<0 θα είναι x^2+x-3<0 **κοντά στο 1** και

$\lim_{x\to1}(x-2)$=1-2=-1<0 θα είναι $x-2$<0 **κοντά στο 1**. Άρα η (α) γίνεται αν

βγάλουμε τα απόλυτα $\lim_{x\to1}\frac{|x^2+x-3|-|x-2|}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2-x+3+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-x^2+1}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}[-(x+1)]=-2$$

- **αν το x_0 είναι ρίζα** δουλεύουμε με πλευρικά όρια.

- $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+|x+1|}{x+1}$

Επειδή $\lim_{x\to-1}(x+1)$=0 θα υπολογίσουμε τα πλευρικά όρια στο -1.

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x+|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2+x-x-1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}(x-1)=-2$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x+|x+1|}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+x+x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{(x+1)^2}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}(x+1)=0$$

Αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το όριο δεν υπάρχει

4. Τριγωνομετρία

Προσπαθούμε να φθάσουμε στα όρια $\lim_{x\to0}\frac{ημx}{x}$=1 και $\lim_{x\to0}\frac{συνx-1}{x}$=0

$$\lim_{x\to0}\frac{ημ5x}{2x}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{5ημ5x}{5(2x)}=\frac{5}{2}\lim_{x\to0}\frac{ημ5x}{5x}\overset{u=5x}{\Longrightarrow}\frac{5}{2}\lim_{u\to0}\frac{ημu}{u}=\frac{5}{2}\cdot1=\frac{5}{2}$$

Απροσδιοριστία 2η: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Κοινός παράγοντας το μεγιστοβάθμιο x σε κάθε όρο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x-1}\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$ αφού $x\to+\infty$ είναι

$x>0$;άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{\sqrt{1+0}+1}{1-0}=2$

Απροσδιοριστία 3η: $+\infty-\infty$

Πολλαπλασιάζω & διαιρώ με την συζυγή

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)(+\infty-\infty)=$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1-x^2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}$ αφού $x\to-\infty$

είναι $x<0$;άρα $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right)=$

$+\infty\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=+\infty\cdot\frac{1}{2}=+\infty$

Απροσδιοριστία 4η: $0\cdot\pm\infty$

Ανάγεται κατάλληλα στις απροσδιοριστίες $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$