Θέμα 2000. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν f(0)=2 και f(1)=4, να δείξετε ότι:

Γ1. η ευθεία y=3 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$. *Μονάδες 7*

Γ2. υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)=\dfrac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$ *Μονάδες 12*

Γ3. υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2x+2000. *Μονάδες 6*

Θέμα 2000. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & , \quad 0<x<5 \\ (\alpha^2+\beta^2)\ln(x-5+e)+2(\alpha+1)\ e^{5-x}, & \quad x\geq 5\end{cases}$

Γ1. Να βρεθούν τα, $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$. *Μονάδες 6*

Γ2. Να βρεθούν τα α, β ∈ R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$. *Μονάδες 10*

Γ3. Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος **2** να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *Μονάδες 9*

Θέμα 2001. Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο R, ισχύει ότι:
$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ για κάθε x∈ R, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα. *Μονάδες 10*

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. *Μονάδες 8*

Γ3. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο ανοικτό διάστημα (0,1). *Μονάδες 7*

Θέμα 2002. Έστω οι f, g με πεδίο ορισμού το R. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1. *Μονάδες 7*

Γ2. Να δείξετε ότι η εξίσωση:
$g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα. *Μονάδες 18*

Θέμα 2003. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^5+x^3+x$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση *Μονάδες 6*

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\geq f(1+x)$ για κάθε x∈R *Μονάδες 6*

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} *Μονάδες 5*

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3 *Μονάδες 8*

Θέμα 2004. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$. *Μονάδες 8*

Γ2. Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_a^0 g(x)dx$, α∈R *Μονάδες 8*

Γ3. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{a\to-\infty} I(a)$ *Μονάδες 9*

Θέμα 2005. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$

Γ1. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα . *Μονάδες 3*

Γ2. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ. *Μονάδες 7*

Γ3. Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y΄y, είναι $E(\lambda) = \dfrac{e-2}{2\lambda}$. *Μονάδες 8*

Γ4. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$. *Μονάδες 7*

Θέμα 2007. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in R$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \pi/2,\ \kappa \in Z$

Γ1. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τ. μέγιστο, ένα τ. ελάχιστο και ένα σ.καμπής. *Μονάδες 7*

Γ2. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες *Μονάδες 8*

Γ3. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$. *Μονάδες 3*

Γ4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2008. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. *Μονάδες 3*

Γ2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. *Μονάδες 9*

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α. *Μονάδες 6*

Γ4. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a^x - \ln(x+1), x > -1$ όπου $\alpha > 0$ και $a \neq 1$

Γ1. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$ να αποδείξετε ότι α=e *Μονάδες 8*

Γ2. Για α=e

i. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή *Μονάδες 5*

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (-1, 0] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$ *Μονάδες 6*

iii. αν β, γ $\in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2) *Μονάδες 6*

Θέμα 2010. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=2x+ln(x^2+1), x∈R

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. *Μονάδες 5*

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ *Μονάδες 7*

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. *Μονάδες 6*

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2011. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in R$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$, $x\in R$ *Μονάδες 8*

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα *Μονάδες 3*

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής *Μονάδες 7*

Γ4. Ν.α.ό. η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2012. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1, x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γν. φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γν. αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$, Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f. *Μονάδες 6*

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, x > 0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. *Μονάδες 6*

Γ3. Αν x_1,x_2 με $x_1<x_2$ οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **2**, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in\left(x_1,x_2\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)+f(x_0)=2012$ *Μονάδες 6*

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γρ. παράσταση της συνάρτησης g(x) = f(x) + 1 με x>0 τον άξονα x′x και την ευθεία x = e. *Μονάδες 7*

Θέμα 2013. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g : $R\to R$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- (f (x) + x) (f′ (x) + 1) = x , για κάθε x $\in R$
- f (0) = 1 και
- $g(x)=x^3+\frac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in R$ *Μονάδες 9*

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f (g(x)) = 1 *Μονάδες 8*

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f(x_0-\frac{\pi}{4})\cdot\varepsilon\varphi x_0$$ *Μονάδες 8*

Θέμα 2014. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1), x\in R$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα. *Μονάδες 5*

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1}, x\in R$ *Μονάδες 7*

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο +∞, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο −∞ . *Μονάδες 6*

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right), x\in R$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα x'x και την ευθεία x=1 *Μονάδες 7*

Θέμα 2015. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$. *Μονάδες 6*

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\dfrac{e^2}{5}$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο R. *Μονάδες 8*

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$ για κάθε $x>0$. *Μονάδες 4*

Θέμα 2016.

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in R$ *Μονάδες 4*

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f :R → R που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε x ∈ R και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *Μονάδες 8*

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1\;\; x\in R$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή. *Μονάδες 4*

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **3**, να λυθεί η εξίσωση:
$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$ όταν x ∈ [0, +∞). *Μονάδες 9*

Θέμα 2017. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = -ημx, xϵ [0, π], και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1) και (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε. *Μονάδες 8*

Γ2. Αν (ε_1):y=-x και (ε_2):y=x – π είναι οι ευθείες του ερωτήματος 1, τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1) και (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$, όπου:

•E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2) και

•E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x . *Μονάδες 6*

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$ *Μονάδες 4*

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2018. Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι $\mathrm{E}(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$ *Μονάδες 5*

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου. *Μονάδες 10*

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2. *Μονάδες 10*

Θέμα 2019. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+a & ,x\geq 1\\ e^{x-1}+\beta x, & x<1\end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 1 *Μονάδες 5*

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της. *Μονάδες 4*

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία είναι αρνητική. *Μονάδες 4*

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_0 f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$ *Μονάδες 4*

Γ5. Ένα σημείο M(x, y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης y = f(x), x ≥ 1. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο A(3, 10), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_0, όπου K(x, 0) και O(0, 0). *Μονάδες 8*

Θέμα 2020. (ΝΕΟ). Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

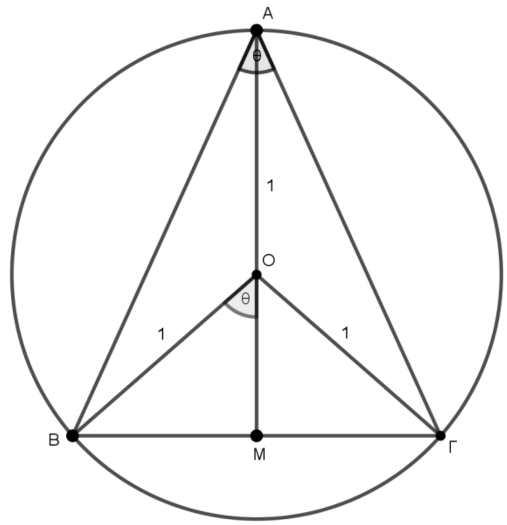
$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x}-ln\lambda & ,x\leq 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases} \quad \text{με } \lambda>0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ *Μονάδες 5*

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$ *Μονάδες 6*

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. *Μονάδες 6*

Γ4. Ένα σημείο $M(a,f(a))$ με $a\leq 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f . Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $a'(t)=-\frac{a(t)}{3}$. Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο έχει τετμημένη -1. *Μονάδες 8*



Θέμα 2020. (ΠΑΛΑΙΟ). Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\widehat{BOM} = \theta$, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:
$E(\theta) = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta)\eta\mu\theta, \theta \in (0, \pi)$. *Μονάδες 5*

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται. *Μονάδες 8*

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2 με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$. *Μονάδες 6*

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος Γ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε $\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$ *Μονάδες 6*

Θέμα 2021. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της *(μονάδες 3)* αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ *(μονάδες 3)* *Μονάδες 6*

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ *(μονάδες 3)*

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ *(μονάδες 3).* *Μονάδες 6*

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. *Μονάδες 6*

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \ge -1$ για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2022. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & x < -1 \\ 3x^2 - 1 & x > -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & x \le -1 \\ x^3 - x & x > -1 \end{cases}$ *Μονάδες 6*

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 *Μονάδες 5*

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου $MK\Gamma$, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0. *Μονάδες 6*

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$ *Μονάδες 8*

Θέμα 2023. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+a, & x\geq 1\end{cases}$, όπου $x\in R$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x)dx=1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $a=0$. *Μονάδες 4*

Γ2. *Μονάδες 8*

i. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“$1-1$”) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της *Μονάδες 6*

Γ4. Έστω (ε): $y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x\geq 1$,την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$. *Μονάδες 7*