Θέμα 2000.

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α $(x_0, f(x_0))$. *Μονάδες 4*

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. *Μονάδες 8,5*

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.
2. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
3. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f' είναι συνεχής στο x_0. *Μονάδες 4,5*

A4. Να αντιστοιχίσετε στο γράμμα της στήλης Α τον αριθμό της στήλης Β.

Στήλη Α **συναρτήσεις**	**Στήλη Β** **εφαπτόμενες**
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=ημ2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\lvert x\rvert$, $x_0=0$	3. $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

Θέμα 2001.

Θέμα 2002.

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$ *Μονάδες 12*

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος

1. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α,β] και συνεχής στο (α,β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α,β] μία μέγιστη τιμή. *Μονάδα 1*
2. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη. *Μονάδα 1*
3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ *Μονάδα 1*
4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . *Μονάδα 1*

Θέμα 2003.

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. *Μονάδες 8*

A2. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; *Μονάδες 7*

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος.

1. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ. *Μονάδες 2*
2. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση. *Μονάδες 2*
3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0. *Μονάδες 2*

Θέμα 2004.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$ *Μονάδες 10*

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 5*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν τη λέξη Σωστό ή Λάθος

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, αν και μόνο αν $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$ *Μονάδες 2*

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f·g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$ *Μονάδες 2*

3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. *Μονάδες 2*

4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε

$$\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(a)$$ *Μονάδες 2*

Θέμα 2005.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(\alpha) \neq f(\beta)$ δείξτε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$. *Μονάδες 9*

Α2. Πότε η ευθεία y =λx +β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞; *Μονάδες 4*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος

1. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] με f(α)<0 και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε f(ξ) = 0, τότε κατ' ανάγκη f(β)> 0. *Μονάδες 2*

2. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$ και $\lim_{x\to x_0}\big(g(x)\big)$ *Μονάδες 2*

3. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο Α με την ευθεία y = x, τότε το σημείο Α ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1} . *Μονάδες 2*

4. Αν $\lim_{x\to x_0}\big(f(x)\big)=0$ και f(x) > 0 κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)=+\infty$ *Μονάδες 2*

5. Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και α είναι σημείο του Δ, τότε ισχύει

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)-f(a)$$ για κάθε $x \in \Delta$. *Μονάδες 2*

6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ. *Μονάδες 2*

Θέμα 2006.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

- Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.
- Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ. *Μονάδες 10*

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ; *Μονάδες 5*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό ή Λάθος. *Μονάδες 10*

1. Αν υπάρχει το $\lim_{x \to x_0}(f(x)) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

2. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

3. Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε x ∈ R .

4. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

Θέμα 2007.

Α1. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; *Μονάδες 4*

Α2. Πότε η ευθεία $y = l$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f στο +∞; *Μονάδες 3*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, ή Λάθος. *Μονάδες 10*

1. Αν f συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x ∈[α, β] ισχύει f(x) ≥ 0 τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$.

2. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε f΄(x) > 0 σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

4. Αν α > 1 τότε $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Θέμα 2008.

Α1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, x∈ R* είναι παραγωγίσιμη στο R* και ισχύει: $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]; *Μονάδες 5*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, ή Λάθος,

i. Αν μια συνάρτηση f:A→ R είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y))y, y \in f(A)$ *Μονάδες 2*

ii. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 2*

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει f΄΄(x) > 0 για $x \in R$ *Μονάδες 2*

iv. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, γ∈Δ τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

Μονάδες 2

Θέμα 2009.

Α1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. *Μονάδες 10*

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 5*

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις μετη λέξη Σωστό, ή Λάθος. *Μονάδες 10*

i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

iii. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

iv. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in$ [α, β], τότε το εμβαδόν του χωρίου **Ω** που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = α, x = β και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_a^\beta f(x)dx$.

Θέμα 2010.

1. Έστω f συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c, c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c, c\in R$ *Μονάδες 6*

2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; *Μονάδες 5*

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, ή Λάθος, *Μονάδες 10*

i. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to \beta^-}f(x)$

iii. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x\in R$

iv. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))<0$ τότε $f(x)<0$, κοντά στο x_0

Θέμα 2011.

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$. *Μονάδες 10*

2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο R. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. *Μονάδες 5*

3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, ή Λάθος. *Μονάδες 10*

i. Μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

ii. Για κάθε $x \in R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

iii. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

iv. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Θέμα 2012.

1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ *Μονάδες 7*

2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]; *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο; *Μονάδες 4*

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, με τη λέξη Σωστό, ή Λάθος, *Μονάδες 10*

i. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x) = y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

ii. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ τότε f(x) < 0 κοντά στο x_0

iii. $(\sigma\phi\chi)' = \frac{1}{\eta\mu^2\chi}$ $x \in R - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

iv. $\int_a^\beta f(x) \cdot g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^\beta - \int_a^\beta f'(x) \cdot g(x)dx$ όπου f', g' συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Θέμα 2013.

1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι: $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$ *Μονάδες 7*

2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) *Μονάδες 4*

3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος

i. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

ii. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in R$

iii. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

iv. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 10*

Θέμα 2014.

1. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ. Αν f συνεχής στο Δ και f′(x) = 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ. *Μονάδες 8*

2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ; *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$; *Μονάδες 3*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ ή $+\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

ii. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

iii. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈ Δ, τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

iv. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

Θέμα 2015.

1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και $f(a) \neq f(\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a), f(\beta)$ και υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$. *Μονάδες 7*

2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0; *Μονάδες 4*

3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο; *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι $fog = gof$.

ii. Για κάθε $x \in R$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)' =$ ημx.

iii. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_a^\beta f(x)dx > 0$.

iv. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Θέμα 2016.

1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) >$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, β)$ τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f. *Μονάδες 7*

2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; *Μονάδες 4*

3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά. *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f : [α,β] → R, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε το

$$\int_{a}^{\beta} f(t)dt = G(a) - G(\beta)$$

ii. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right) \leq \lim_{x\to x_0}\left(g(x)\right)$

iii. Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (α, x_0) \cup (x_0, β)$, είναι σταθερή στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$.

iv. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y = f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

v. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Θέμα 2017.

1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. *Μονάδες 7*

2. Θεωρήστε παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Σωστό ή Λάθος. *(μονάδα 1)*

ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i. *(μονάδες 3)* *Μονάδες 4*

3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]; *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*

i. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f: $R \to R$ και g: $R \to R$, αν $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right) = 0$ και $\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\right) = +\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 0$.

ii. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

iii. Για κάθε συνάρτηση f: $R \to R$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

iv. Αν 0 < α <α1, τότε $\lim_{x\to -\infty} a^x = +\infty$ x

v. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Θέμα 2018.

1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. *Μονάδες 7*

2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: *Μονάδες 4*
«Κάθε συνάρτηση $f: R \to R$ που είναι "1-1" είναι και γνησίως
i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Σωστό ή Λάθος. *(μονάδα 1)*
ii. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα i. *(μονάδες 3)* μονότονη.»

3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού. *Μονάδες 4*

4. Σωστό – Λάθος *Μονάδες 10*
i. Η συνάρτηση f(x)=ημx με x∈R έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.
ii. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε x∈Δ.
iii. Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$
iv. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x.
v. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

Θέμα 2019.

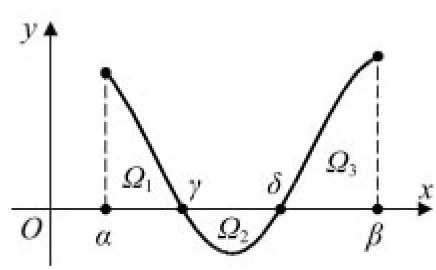
A1. Έστω $A \subseteq R$
1. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α *Μονάδες 2.*
2. α)Πότε μια συνάρτηση $f: A \to R$ έχει αντίστροφη; *Μονάδες 1*
β)Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (α), πώς ορίζεται η αντίστροφη της f; *Μονάδες 3*

A2. Να διατυπώσετε του θ. του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης. *Μονάδες 4*

A3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, να αποδείξετε ότι ηf είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.: *Μονάδες 5*

A4. Σωστό – Λάθος **<u>με δικαιολόγηση</u>**
i. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε x∈A, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A. *Μονάδες (1+3)*
ii. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0. *Μονάδες (1+3)*

A5. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$ τότε
το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 β) -4 γ) 4 δ) 0 ε) 2 *Μονάδες (2)*

Θέμα 2020. (ΝΕΟ)

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

Να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$. *Μονάδες 7*

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 4*

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f,ορισμένη, παραγωγίσιμη και γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$,ισχύει $f'(x) > 0$»

1. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) *Μονάδες 1*
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *Μονάδες 3*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ). *Μονάδες 10*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^{2\nu+1}}\right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.
2. Αν είναι f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α και Β, αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν, $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
4. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.
5. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτόμενη της C_f είναι οριζόντια.

Θέμα 2020. (ΠΑΛΑΙΟ)

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ *Μονάδες 7*

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1το σύνολο των σημείων το στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πως ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f; *Μονάδες 4*

Α3. Να διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano. *Μονάδες 4*

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = -\infty$»

1. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ) *Μονάδες 1*
2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. *Μονάδες 3*

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ). *Μονάδες 10*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ για x κάθε κοντά στο x_0.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο (α,β) παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$
3. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 2021.

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ. *Μονάδες 7*

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής f; *Μονάδες 4*

Α3. Πότε δυο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες; *Μονάδες 4*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ). *Μονάδες 10*

1. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$
2. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι
3. $f(f^{-1}(x)) = x,\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x \in A$
4. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) => 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
5. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ
6. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β], τότε η παίρνει στο [α , β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Θέμα 2022.

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της fστο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

1. Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ.
2. Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει την μορφή με $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat. *Μονάδες 4*

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ; *Μονάδες 4*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ). *Μονάδες 10*

1. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$
2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.
3. Η $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = R - \{x/\eta\mu x \neq 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu x}$.

4. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$

5. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Θέμα 2023.

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ *Μονάδες 6*

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; *Μονάδες 4*

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (*μονάδες 3*) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (*μονάδες 2*). *Μονάδες 5*

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λάθος (Λ). *Μονάδες 10*

1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$
2. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.
3. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.
4. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» ("$1-1$") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.
5. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fog και gof, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.