Θέμα 2000. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-e^{2x}+1}{\eta\mu 2x}=5$$

1. Να βρείτε το f(0). Μονάδες 7

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$. Μονάδες 9

3. Αν $h(x)=e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες. Μονάδες 9

Θέμα 2001. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\alpha, & x\le 1\\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), & x\in(1,2]\end{cases}$ όπου $\alpha\in R$

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$ Μονάδες 7

2. Να βρείτε το $\alpha\in R$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_o=1$ Μονάδες 11

3. Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x΄x. Μονάδες 7

Θέμα 2002.

Θέμα 2003. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+1}-x$

1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Μονάδες 5

2. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γρ. παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$ Μονάδες 6

3. Να αποδείξετε ότι $f\,'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x) = 0$ Μονάδες 6

4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$. Μονάδες 8

Θέμα 2004.

Θέμα 2005. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in R$

1. Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.. Μονάδες 7

2. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία A(1,2005) και B(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$ Μονάδες 9

3. δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{668}x+2005$. Μονάδες 9

Θέμα 2006.

Θέμα 2007. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x,\ x > 0$

1. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$. Μονάδες 10

2. Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \ge e$ για κάθε $x > 0$ Μονάδες 7

3. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_{2}^{4} f(t)dt$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$. Μονάδες 8

Θέμα 2008. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2\ln x$, $x>0$

1. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$. Μονάδες 6

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f Μονάδες 6

3. Έστω η συνάρτηση $g(x)\begin{cases}\dfrac{\ln x}{f(x)}, & x>0\\ k, & x=0\end{cases}$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής Μονάδες 6

ii. Αν $k=-\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (0, e). Μονάδες 7

Θέμα 2009. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2)$, $x>-1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με λ-1

1. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Μονάδες 5

2. Έστω ότι $\lambda=-1$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της Μονάδες 10

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f Μονάδες 6

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$ Μονάδες 4

Θέμα 2010. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$

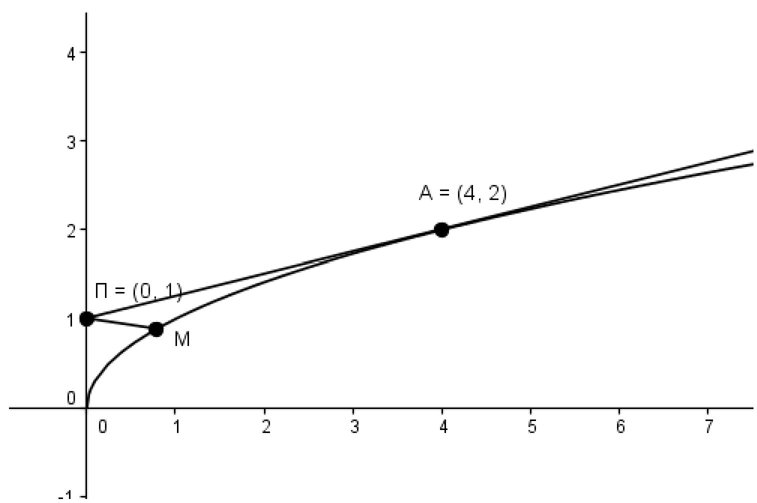
1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Μονάδες 5

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες. Μονάδες 6

4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος Γ3 με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 9

Θέμα 2011. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}, x\geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Οxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή των αξόνων Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ είναι $x'(t)=16m/\min$.



1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t\geq 0$ δίνεται από τον τύπο: $x(t)=16t$

2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή. Μονάδες 5

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α. Μονάδες 6

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d = (ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη. Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

Θέμα 2012. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, για την οποία ισχύει $xf(x) + 1 = e^x$, για κάθε $x \in R$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ *Μονάδες 6*

2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της. *Μονάδες 6*

3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)). Στη συνέχεια αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = x + 2, x \in R$ έχει ακριβώς μία λύση. *Μονάδες 8*

4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[x(\ln x)\ln(f(x)) \right]$ *Μονάδες 5*

Θέμα 2013. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύουν:

$2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε x ∈ R & $f(1) = \frac{1}{2}$

1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, x ∈ R και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R *Μονάδες 6*

2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος 1. *Μονάδες 4*

3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$f\left(5(x^2 + 1)^3 - 8\right) \leq f\left(8(x^2 + 1)^2\right)$ *Μονάδες 7*

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, ξ∈(0, 1) τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t)dt = -\xi(3\xi^2 - 1)f(\xi^3 - \xi)$$

Μονάδες 8

Θέμα 2014. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ *Μονάδες 4*

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f *Μονάδες 7*

3. **i)** Να αποδείξετε ότι, για x>0, ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Ν.α.ο. η εξίσωση $x^4 = 4^x$, x>0, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ & $x_2 = 4$ *Μονάδες 8*

4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\left(\sqrt{2} - f(\xi)\right)$$ *Μονάδες 6*

Θέμα 2015. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $x \in (0,+\infty)$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. *Μονάδες 6*

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με $g(x) = \int_1^{h(x)} \sqrt{t^2 - 1}\, dt$, όπου

$h(x) = f(x^2 + 1) - f(2) + 1$ *Μονάδες 6*

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = 1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2 *Μονάδες 6*

4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος 3 ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ *Μονάδες 7*

Θέμα 2016. Δίνεται η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = x^3$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 (*μονάδες 2*) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} (*μονάδες 4*). *Μονάδες 6*

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε x 0 ισχύει: $f(\eta\mu x) = f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$ *Μονάδες 9*

3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ $x \geq 0$, $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y(t) του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$. *Μονάδες 4*

4. Αν $g : R \to R$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$ *Μονάδες 6*