

I. Πολυωνυμικές

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + 6x - 7)$ ii. $\lim_{x \rightarrow -3} [(x+5) \cdot [(x+2)^2 - 7]]$ iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 - 5x^2 + 12x + 17)$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -1} (x^5 - 3x + 1)$ v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(5x-1)(7x^2 + 2x - 3)]$ vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^7 - 6x^3 + \sqrt{3}x^2 - 8x + 1)$
- vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - ax + \beta)$ viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - ax + \beta)$ ix. $\lim_{x \rightarrow 1} [(2x^2 + 1)(x-1)(x^4 + 6)]$

II. Ρητές

- i. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - (\sqrt{3}-1)x - \sqrt{3}}{x^2 - 3}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 8x - 4}{x - 2}$ iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 - 5x - 3}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 - 2x^2 + 8x - 1}{-2x^3 - 2x - 3}$ v. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 42}{x}$ vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)(x+1)}{-x^2 - 2x + 8}$
- vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x + 13}{5x^5 - 8x^4 + 12x - 1}$ viii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x + 12}{x - 1}$ ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2(3x+2)}{(x-1)(4x^2+1)}$
- x. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x+2)^3}$ xi. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-5x+7}{x_2 + 4x + 4}$ xii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x-2)^2}$
- xiii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2ax^3 - 5x^2 + \beta}{4ax^3 + \beta x - \gamma}$ xiv. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 - 2ax}{x - a}$ xv. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^2 + 1}{x - a}$

III. Άρρητες

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} (12 + \sqrt{x-2})$ ii. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} + 4}{x - 9}$ iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x^2 - 7x + 9}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{4x^2 - 5x + 6}$ v. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ vi. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - \sqrt{x+3} + 1}$
- vii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 2}{\sqrt[3]{26+3} - 3}$ viii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{\sqrt{x+1}}$ ix. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x}$
- x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{5x^3 + 2x^2 + 6x - 1}$ xi. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1} + 2x}$
- xiii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$ xiv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{-x+1}}{x+1}$ xv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x}{\sqrt{x^2 + x - x}}$
- xvi. $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3x^3 + 4x - 1}$ xvii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$ xviii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{x} - \sqrt{6}}{x^2 - 2}$

IV. Τριγωνομετρικές

i. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{2\eta\mu 2x + 1}{\sigma\upsilon\nu 2x}$	ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 2x}{\eta\mu 3x + x}$	iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3 + 5x) \cdot \eta\mu x}{3x^2 - x}$
iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x - \eta\mu 4x}{9x}$	v. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{20x^2 - \pi x - \pi^2}{\eta\mu(\pi/4 - x)}$	vi. $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{2\eta\mu 2x + 1}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$
vii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x}{x}$	viii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$	ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
x. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \alpha x}{\eta\mu \beta x}$	xi. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$	xii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \eta\mu \frac{1}{x} \right)$
xiii. $\lim_{x \rightarrow 0} x \eta\mu \frac{\pi}{x}$	xiv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{x}$	xv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$

V. Εκθετικές

i. $\lim_{x \rightarrow 0} (5 \cdot 2^x - 8 \cdot e^x)$	ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - x}{x^2 - 1}$	iii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{x^2 + 2^x}$	iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot e^x - 4}{2^x - 1}$
v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x}{x^2 - 5x + 6}$	vi. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$	vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot 3^x}{2x^2 + 6x - 1}$	viii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 6}{(0,5)^x}$
ix. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2}{x^2 + x + 1}$	x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2(\sqrt{3})^x - 5\left(\frac{1}{5}\right)^x - 7e^x]$	xi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$	
xii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x-1} - x)$	xiii. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{x-1} - x)$	xiv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-1} - x}{e^x}$	xv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1}$

VII. Λογαριθμικές

i. $\lim_{x \rightarrow e^2} (5 \ln x + 7)$	ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \log_2 x^2 - 4}{x + 2}$	iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 \ln x}{x - 1}$	iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$
v. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e \ln x^2 - 2x}{x^2 - e^2}$	vi. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \ln x + 2 - 6}{x^2 - 1}$	vii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{\ln x}$	viii. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x \ln x)$
ix. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \sqrt{x+1}$	x. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \sqrt{x+1}$		

VIII. Με απόλυτα

i. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 5x - 1 $	ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ x^2 + 2x + 5 }{(x-2)^2}$	iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ -5x^2 + 6x - 1 }{ 2x^2 + x - 1 }$
iv. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ x^2 - 2x + 1 }{x - 1}$	v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 x^2 - 5x + 6 }{x + 3}$	vi. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{ x - 3 }$

IX. Πολλαπλού τύπου

1. Να υπολογίσετε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} + 3\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases} \text{ και } x_0 = 1$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x - 1}{x^2 - 1} \text{ και } x_0 = 1.$$

X. Παραμετρικές

1. Να βρεθούν τα a και β αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ και $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - a}{x + 3}, & x < 0 \\ e^{\beta x} + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$.

2. Για τις διάφορες τιμές του λ να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 1} - \lambda x)$	ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda^2 - 1)x^3 + 3x^2 - 6x + 7}{(\lambda^2 - \lambda)x^2 + 2x - 1}$
iii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{\lambda x^2 - 1} - \lambda x)$	iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 4\lambda + 3)x^3 + (\lambda - 1)x^2 + x - 1}{(\lambda^2 + \lambda - 2)x^3 + (\lambda - 1)x^2 + 2x + 4}$
v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda - 1)x^3 + 4x + 1}{\lambda x^2 + 1}$	vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 2)x^3 + 5x^2 - 1}{(\lambda - 1)x^2 + 1}$

3. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο \mathbf{R} με $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4\mu + 3$ και $x \cdot f(x) \geq \eta\mu 3x + 5x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$ να βρεθεί η τιμή του $\mu \in \mathbf{R}$.

4. Να βρεθεί το $a \in \mathbf{R}^*$ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2}{1 - \sigma\upsilon\eta x}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \frac{\eta\mu x}{\sqrt{1 + x} - 1}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

5. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + x^2} + \lambda x}{x} = 1$ να βρεθεί το $\lambda \in \mathbf{R}$.

6. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{(\lambda - 1)x^2 + 2x + 2} - \sqrt{x^2 + 2}$.

α) Να βρεθεί το λ ώστε το πεδίο ορισμού της $g(x)$ να είναι το \mathbf{R} .

β) Για ποια τιμή του λ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \in \mathbf{R}$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\lambda|x + 2| + k|x - 4| - 2}{x^2 - 5x + 6}$, να βρείτε τις τιμές των $k, \lambda \in \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$.

Χ. Γενικές ασκήσεις

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, τότε και $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ Σ - Λ

2. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}, & x \leq 0 \\ \frac{-x^2 - x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

3. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $g(0) = 1$ με $g(x)$ μια συνεχής συνάρτηση και $f'(x) = -2x^3 g(x^2)$ να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu^4 x}$.

4. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + \eta\mu^2 x}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + \sigma\upsilon\nu_2 x}} \right\}$.

5. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \sigma\upsilon\nu(x^2 + 1), & x < 0 \\ \frac{x + 2 - 2\sqrt{2x}}{(x - 2)^3}, & x > 2 \end{cases}$. Να υπολογιστούν τα $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

6. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5}{f(x)} = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 5} [f(x) \cdot (6x^2 + 8)] = +\infty$$

7. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ αν $f(x) = \sqrt{x - 1}$	ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ αν $f(x) = \eta\mu^3(x - 2)$
iii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ αν $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$	iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ αν $f(x) = \begin{cases} x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x} \eta\mu \frac{x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

8. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\eta\mu ax} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}] = 2$ να βρεθεί ο $a \in \mathbf{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = 27 + a^2$

9. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x - 1} = 4$