ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο (α,β) και υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)<0$, τότε θα ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$.
2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και παίρνει δύο διαφορετικές τιμές $f(x_1)$, $f(x_2)$ με $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$, τότε παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$.
3. Αν για μια συνεχή συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$, τότε υπάρχει $x_0 \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(\alpha),f(\beta)]$.
5. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της είναι $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$.
6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $[f(\beta),f(\alpha)]$.
7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της είναι $\left(\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$.
8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $\left[f(a), \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)\right)$
9. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha,\beta]$, τότε το σύνολο τιμών της είναι $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha^-} f(x)\right)$
10. Κάθε συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$, παίρνει μόνο τις τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.
11. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και το $0 \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια το πολύ λύση στο Δ.
12. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και το $y \in f(\Delta)$ τότε η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μια το πολύ λύση στο Δ.
13. Αν η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$.
14. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$, τότε κοντά στο x_0 οι τιμές της f είναι ομόσημες του $f(x_0)$.
15. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
16. Κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
17. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$.
18. Αν f συνεχής στο R, $f(x)\neq 0$, $x\in R$ και $f(-2)>0$ τότε $f(x)>0$, $x\in R$
19. Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[a,\beta]$ με $f(a)=3$ και $f(\beta)=1$. Η εξίσωση $f(x)=2$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο (a,β).
20. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο R για την οποία ισχύει $f(0)\cdot f(3)<0$. Τότε υπάρχει $x_0 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.
21. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ και συνεχής στο $(\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha,\beta]$ μία μέγιστη τιμή.

22. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A,B), όπου $A=\lim_{x\to a^{+}} f(x)$ και $B=\lim_{x\to \beta^{-}} f(x)$.

23. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

24. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

25. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

26. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ΄αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x\in\Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x\in\Delta$, δηλαδή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα Δ.

27. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(a)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$ τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$

28. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης ορισμένης σε ανοικτό διάστημα είναι επίσης ανοικτό διάστημα.

29. Αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

30. Για δύο συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ συναρτήσεις, υπάρχει σημείο στο οποίο η απόσταση τους γίνεται μέγιστη.

31. Αν μια συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$, έχει σύνολο τιμών το $[f(\alpha),f(\beta)]$, τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$.

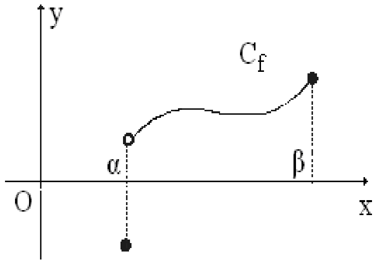
32. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε δεν παίρνει υποχρεωτικά και όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha), f(\beta)$.

33. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι $1-1$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε είναι και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$

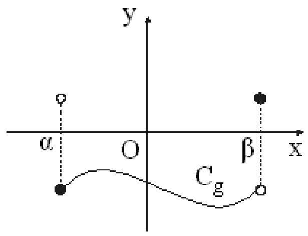
34. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $f(\Delta)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

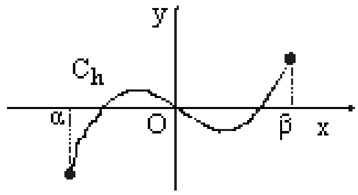
1. Δίνονται οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις κάποιων συναρτήσεων f, g, h, φ, t.



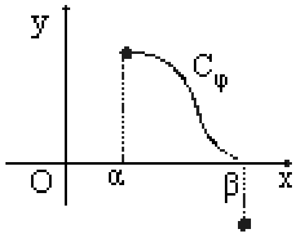
(α)



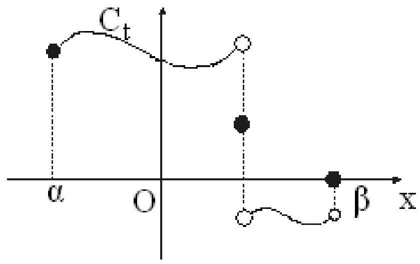
(β)



(γ)



(δ)



(ε)

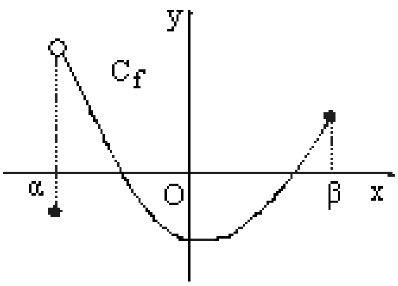
Τότε οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [α, β] ισχύουν για την περίπτωση

Α. της συνάρτησης f **Β.** της συνάρτησης g **Γ.** της συνάρτησης h

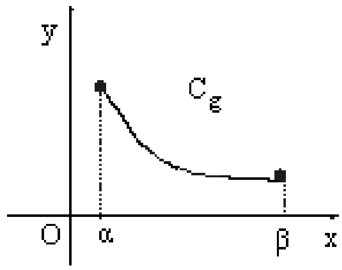
Δ. της συνάρτησης φ **Ε.** της συνάρτησης t

2. Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f, g, h, \varphi, t, \sigma$. Για ποια από τις συναρτήσεις ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Bolzano στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;

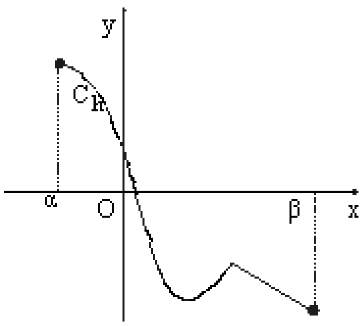
Α.



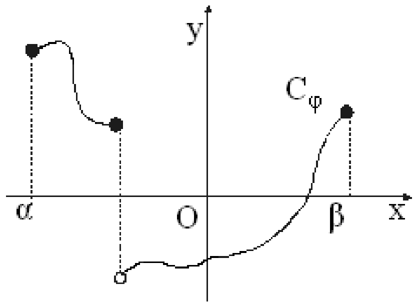
Β.



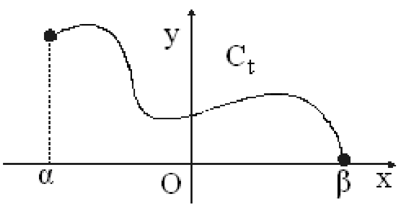
Γ.



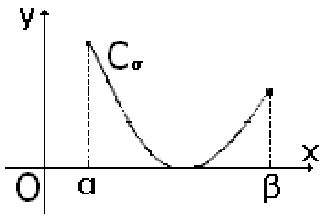
Δ.



Ε.



Ε.



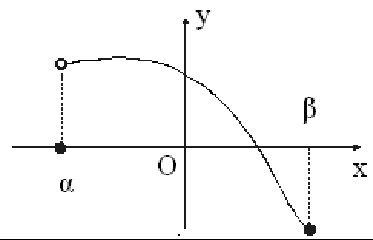
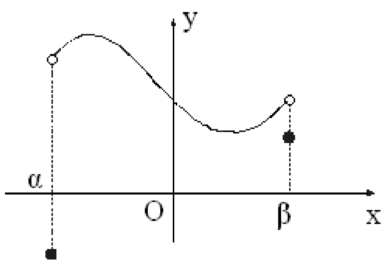
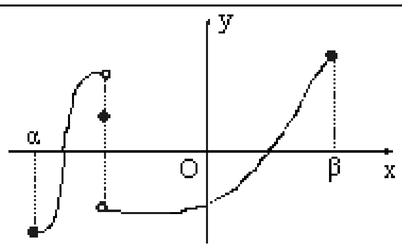
3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta) > 0$, τότε από τις παρακάτω προτάσεις σωστή είναι πάντοτε η
   Α. $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$
   Β. δεν υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$
   Γ. η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$
   Δ. η C_f δεν τέμνει ποτέ τον άξονα $y'y$
   Ε. καμία από τις προηγούμενες προτάσεις

4. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β] και γνησίως φθίνουσα. Τότε το σύνολο τιμών της f είναι
   Α. $[f(\alpha), f(\beta)]$
   Β. $[f(\beta), f(\alpha)]$
   Γ. $[\beta, \alpha]$
   Δ. $(f(\beta), f(\alpha))$
   Ε. το R

5. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 2$. Τότε **λάθος** είναι
   Α. $f(-1) > 0$
   Β. $f(1) < 0$
   Γ. η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$
   Δ. υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$
   Ε. $f(-1)\cdot f(1) > 0$

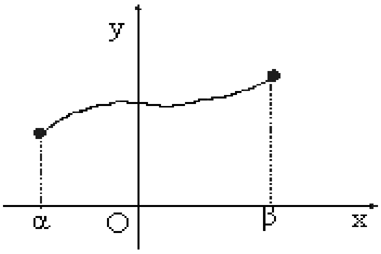
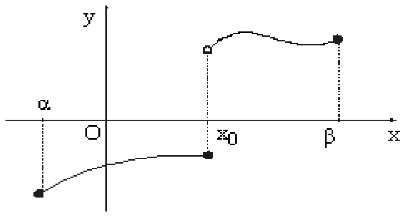
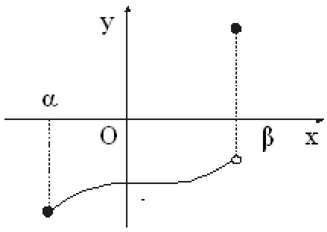
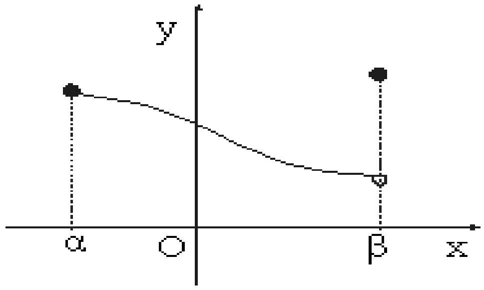
Ερωτησεις Συμπληρωσης

1. Να συμπληρώσετε δίπλα σε κάθε γραφική παράσταση ποια ή ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δεν ισχύουν. Σε ποιες περιπτώσεις (παρότι δεν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις) η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση;

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Αντιστοιχίστε τις C_f της στήλη Α, με τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο διάστημα [α, β] δεν ισχύουν.

Στήλη Α		**Στήλη Β**
1.		**α.** $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$
2.		**β.** f συνεχής στο x_0
3.		**γ.** f συνεχής στο α
		δ. $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$ και f συνεχής στο β
4.		**ε.** f συνεχής στο β

2. Αν f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα στοιχείο της στήλης Β.

Στήλη Α (Δ)	**Στήλη Β (f(Δ))**
1. $\Delta = [\alpha,\beta]$	**α.** $\left(\lim\limits_{x\to\beta} f(x), \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)$
	β. $\left[f(\alpha), \lim\limits_{x\to\beta} f(x)\right)$
2. $\Delta = [\alpha,\beta)$	**γ.** $\left(\lim\limits_{x\to\beta} f(x), f(\alpha)\right]$
	δ. $[f(\beta), f(\alpha)]$
3. $\Delta = (\alpha,\beta]$	**ε.** $\left[f(\beta), \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)$
4. $\Delta = (\alpha,\beta)$	**ζ.** $\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x), f(\beta)\right]$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $lnx + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = συν2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

3. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύουν ότι $f(0) = 1, f(2) = -2, f(4) = 2, f(6) = -4$ και $f(8) = 1$.

α) Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η C_f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(0, 8)$.

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[4, 6]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[6, 8]$, τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

4. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, \alpha]$ με $f(0) = f(\alpha)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f(\frac{\alpha}{2} + x)$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\alpha}{2})$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(\frac{\alpha}{2} + x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\alpha}{2})$.