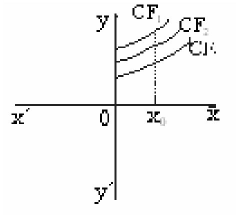
ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

1. Η συνάρτηση F (x) = xlnx - x είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f (x) = lnx.

2. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ, έχει μόνο μια παράγουσα στο Δ.

3. Αν F_1, F_2 είναι δυο παράγουσες μιας συνάρτησης f, τότε αυτές διαφέρουν κατά μια σταθερά c.

4. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{x^2+1}$ δεν έχει παράγουσα στο διάστημα [1, + ∞).



5. Οι γραφικές παραστάσεις των παραγουσών F_1, F_2, F_3 μιας συνάρτησης f, που φαίνονται στο διπλανό σχήμα, έχουν παράλληλες εφαπτόμενες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.

6. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων F (x) = e^x + c, έχουν εφαπτόμενες παράλληλες σε κάθε σημείο τους με τετμημένη x_0.

7. Αν f (t) = $\int_a^t x\sqrt{x^2-2x}\,dx$, τότε $\int_a^t x^2\sqrt{x^2-2x}\,dx = xf(t)$.

8. Ισχύει ότι $\int_a^\beta \dfrac{(x^2-4x)}{(x^3+1)}dx=\dfrac{\int_a^\beta (x^2-4x)dx}{\int_a^\beta (x^3+1)dx}$.

9. Ισχύει: $\int_0^a xf'(x)\,dx = af(a)-\int_0^a f(x)\,dx$.

10. Ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx+\int_\beta^\alpha f(x)\,dx=0$.

11. Ισχύει: $\int_\beta^\alpha f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int_\beta^\alpha f'(x)\,g(x)\,dx$.

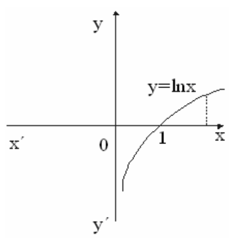
12. Ισχύει: $\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx=0$.

13. Ισχύει: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$.

14. Ισχύει: $\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$.

15. Ισχύει: $\left(\int_x^a f(t)\,dt\right)' = -f(x)$.

16. Ισχύει: $\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\,dt\right)' = f(h(x))\cdot h'(x)+f(g(x))\cdot g'(x)$.



17. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που παριστάνει το $\int_1^x \frac{1}{t}dt$.

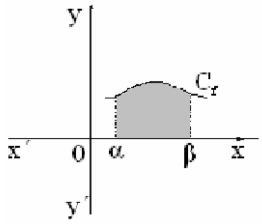
18. Ισχύει $\int_2^4 c\,dx=\int_6^8 c\,dx$, c σταθερά.

19. Αν f συνεχής στο R και f (10) = 100, τότε ισχύει: $100 = f(0)+\int_0^{10} f'(x)\,dx$.

20. Ισχύει: $\int_0^1 \eta\mu x dx = 1-\sigma\upsilon\nu 1$.

21. Αν θεωρήσουμε ότι e ≈ 2,7, τότε ισχύει $\int_0^1 e^x dx = 1{,}7$.

22. Το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος είναι ίσο με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + c$, c ≠ 0.



23. Αν Α = $\int_0^2 f(x)dx$, τότε:

i. $\int_0^2 f(\omega)d\omega$ = Α **ii.** $\int_2^0 f(t)dt$ = - Α **iii.** $\int_0^2 (3f(z)-4)dz = 3A-8$

24. Αν η f είναι περιοδική συνάρτηση στο R με περίοδο Τ, τότε θα ισχύει: $\int_0^T f(t)dt = \int_T^{2T} f(t)dt$.

25. Αν α ≥ β, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} (e^x+1)dx \geq 0$.

26. Αν f (x) > 0, τότε ισχύει $\int_1^{\ln 2} f(x)dx > 0$.

27. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ τότε f (x) ≥ 0 για κάθε x ∈ [α, β].

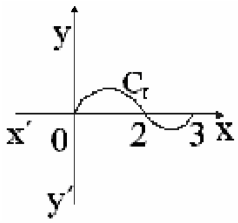
28. Αν f (x) ≤ g (x) για κάθε x ∈ [α, β], τότε θα ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.

29. Αν α < β, τότε ισχύει ότι $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.

30. Αν η f είναι συνεχής στο [1, 3], τότε ισχύει ότι $\int_1^3 f(x)dx < \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$.

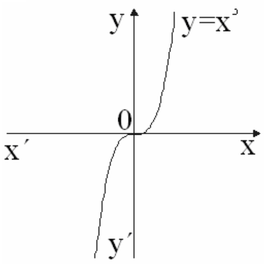
31. Για τη συνάρτηση του διπλανού σχήματος ισχύει ότι:

$\int_0^2 f(x)\,dx < \int_0^3 f(x)\,dx$.



32. Για τη συνάρτηση του σχήματος, ισχύει ότι

$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$, για κάθε α > 0.



33. Ισχύει: $\int_0^{2\pi} \eta\mu x dx = 0$.

34. Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα x΄x και των ευθειών x = α, x = β.

35. Ισχύει: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1-4\sigma\upsilon\nu^3 x)dx > 0$.

36. Ισχύει: $\int_1^{x^2} \frac{1}{t}dt = 2\ln x$, x > 0.

37. Αν $\int_{a}^{\beta} f(x)\, dx = \int_{a}^{\beta} g(x)\, dx$, τότε f (x) = g (x) για κάθε x ∈ [α, β].

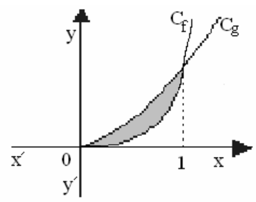
38. Η ιδιότητα $\int_{a}^{\beta} f(x)dx = \int_{a}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$, ισχύει μόνο εφόσον α < γ < β.

39. Ισχύει ο τύπος $\left(\int_{x}^{a} f(t)dt \right)' = -\left(\int_{a}^{x} f(t)dt \right)'$.

40. Ισχύει: $\int_{\ln a}^{\ln \beta} e^{x} dx = \beta - a$, α, β > 0.

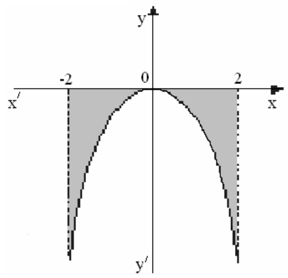
41. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0, 1] και f (0) = f (1), τότε $\int_{0}^{1} f'(x)\, dx = 0$.

42. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του σχήματος δίνεται από τη σχέση: E = $\int_{0}^{1} (x^3 - x^2) dx$.



(Οι γραφικές παραστάσεις στο σχήμα είναι οι $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^3$.

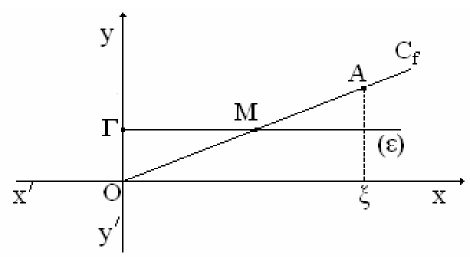
43. Για το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο σχήμα, ισχύει: E = $-\int_{-2}^{2} f(x)dx$ -.



44. Αν $\int_{0}^{5} f(x)dx = 10$, το ελάχιστο της f στο διάστημα [0, 5] δεν μπορεί να είναι 3.

45. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Αν Μ μέσον του ΟΑ και (ε) // x΄x,

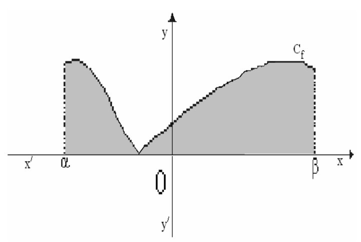
τότε θα ισχύει: $\int_{0}^{\xi} f(x)\, dx = (O\Gamma) \cdot \xi$.



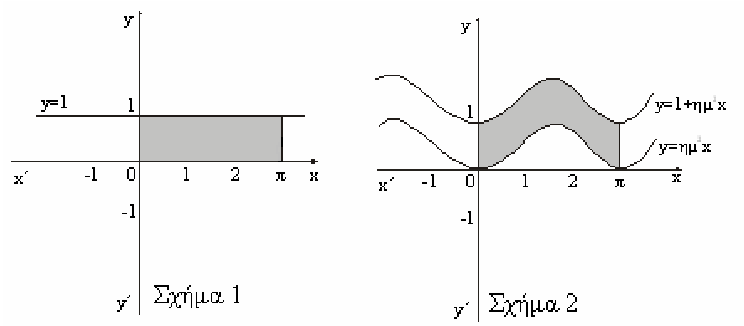
46. Η παράγωγος της $\int_{0}^{2} e^{-t} \cdot \sigma\upsilon\nu t\, dt$ είναι η $e^{-x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$

47. Το ολοκλήρωμα $\int_{1}^{e} \ln\frac{1}{x} dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $f(x) = \ln\frac{1}{x}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1, x = e$

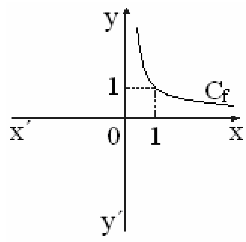
48. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με E = $\int_{a}^{\beta} f(x)dx$.



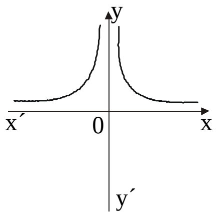
49. Το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 1 είναι μεγαλύτερο από το σκιασμένο εμβαδόν του σχήματος 2.

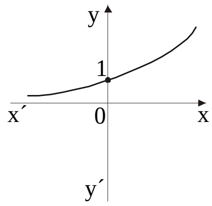


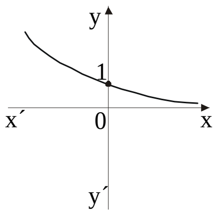
ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

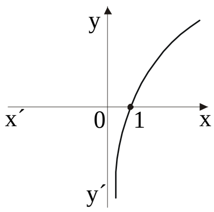


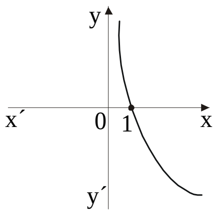
1. Αν η συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε μία παράγουσά της μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

Α. 

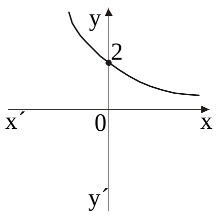
Β. 

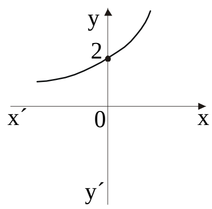
Γ. 

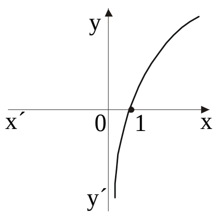
Δ. 

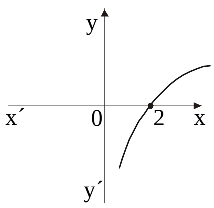
Ε. 

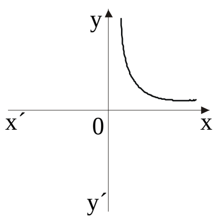
2. Αν f (x) = e^x, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

Α. 

Β. 

Γ. 

Δ. 

Ε. 

3. Το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ

Α. είναι αριθμός

Β. είναι μια παράγουσα της f

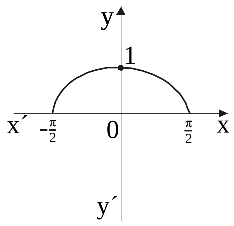
Γ. είναι το σύνολο των παραγουσών της f

Δ. είναι ίσο με $f'(x)$

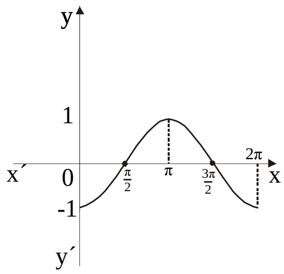
Ε. είναι ίσο με $f(x) + c$, $c \in R$

4. Αν $F(x) = -$ ημx είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f στο $[0, 2\pi]$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι

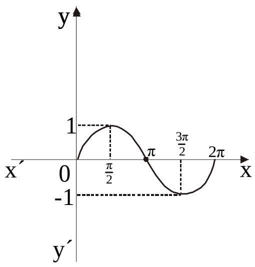
Α.



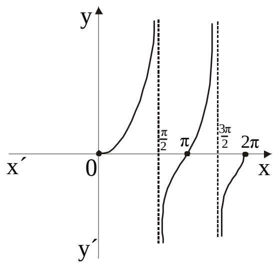
Β.



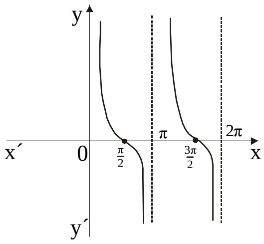
Γ.



Δ.

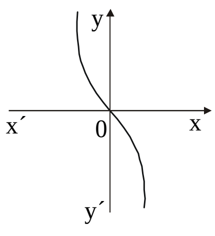


Ε.

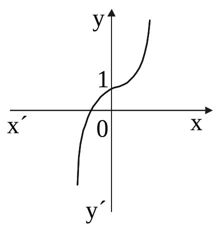


5. Αν $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}$ είναι μία παράγουσα της συνάρτησης f, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι

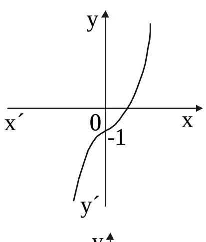
Α.



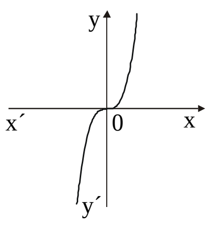
Β.



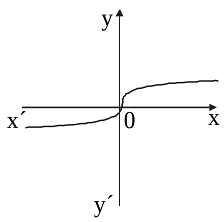
Γ.



Δ.



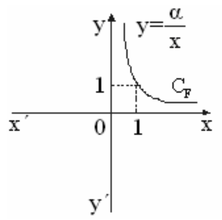
Ε.



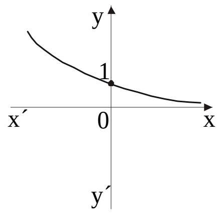
6. Η παράγωγος της συνάρτησης $F(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$ ισούται με

Α. 0 **Β.** $\frac{1}{x}\,e^x$ **Γ.** e^x **Δ.** xe^x **Ε.** $\ln x \cdot e^x$

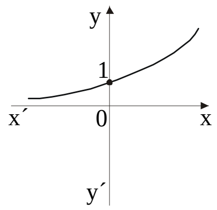
7. Αν μία παράγουσα F μιας συνάρτησης f έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι



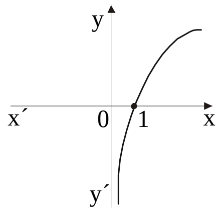
Α.



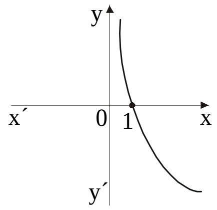
Β.



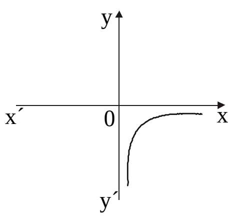
Γ.



Δ.

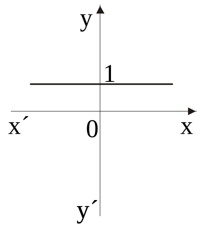


Ε.

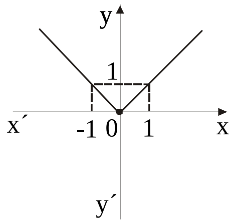


8. Αν f (x) = 1, τότε μία παράγουσα της f μπορεί να έχει γραφική παράσταση την

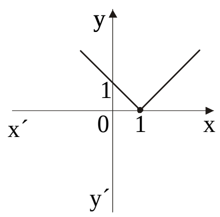
Α.



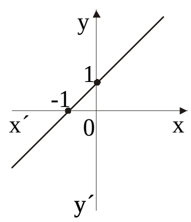
Β.



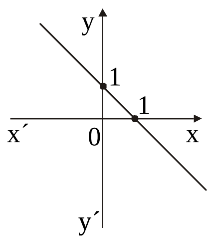
Γ.



Δ.



Ε.



9. Το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta \left(f(x)\,g(x)\right)'\,dx$ ισούται με

Α. f΄(β) g(β) - f(α) g΄(α) **Β.** f(β) g(β) - f(α) g (α) **Γ.** (f·g)(α) - (f·g)(β)
Δ. f(β) g΄(β) - f΄(α) g(α) **Ε.** 2 (β - α)

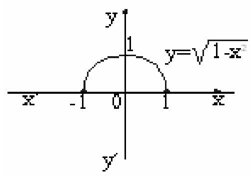
10. Αν f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και $\alpha \in \Delta$, τότε μία παράγουσα της f στο Δ είναι η συνάρτηση

Α. $F(x) = \int_{f(x)}^{\alpha} f(t)\,dt$ **Β.** $F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Γ. $F(x) = \int_{\alpha}^{f(x)} f(t)\,dt$ **Δ.** $F(x) = \int f(t)\,dt$

Ε. $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(u)\,du$

11. Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ισχύει



Α. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$ **Β.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$

Γ. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$ **Δ.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi$

Ε. $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \pi^2$

12. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ και α, β, $\gamma \in \Delta$. Τότε ισχύει

Α. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\gamma}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Β. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$

Γ. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx$

Δ. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = 0$

Ε. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$

13. Μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1+e^x}$, $x > 0$, είναι η συνάρτηση

Α. $F_1(x) = \dfrac{x^3 + \ln x}{x + e^x}$ **Β.** $F_2(x) = \dfrac{6x - \frac{1}{x^2}}{e^x}$

Γ. $F_3(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\dfrac{3x^2 + \frac{1}{x}}{1+e^x} \right)' dx$ **Δ.** $F_4(x) = \int_{2004}^{x} \dfrac{3t^2 + \frac{1}{t}}{1+e^t}\,dt$

Ε. καμία από τις προηγούμενες

14. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η παράσταση $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right)'$ είναι ίση με

Α. $f(x)$ **Β.** $f(\beta) - f(\alpha)$

Γ. $(\beta - \alpha)\, f(x)$ **Δ.** 0 **Ε.** $F(\beta) - F(\alpha)$ όπου $F(x)$ παράγουσα της f

15. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα με ταχύτητα $\upsilon(t) = 2t$ m/sec. Κατά τη διάρκεια του νιοστού δευτερολέπτου το σώμα διάνυσε 9 μέτρα. Ισχύει:

Α. $\nu = 1$ **Β.** $\nu = 3$ **Γ.** $\nu = 4$ **Δ.** $\nu = 5$ **Ε.** $\nu = 10$

16. Αν $I = \int_{0}^{\pi/2} \eta\mu^2 x\,dx$ και $J = \int_{0}^{\pi/2} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$ και $K = I + J$, τότε το Κ είναι ίσο με

Α. 1 **Β.** 2 **Γ.** π **Δ.** 2π **Ε.** $\frac{\pi}{2}$

17. Το ολοκλήρωμα $I = \int_{\alpha}^{\beta} f'(g(x))\, g'(x)\,dx$ είναι ίσο με

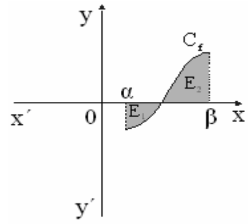
Α. $f'(g(\beta)) - f'(g(\alpha))$ **Β.** $f(g'(\beta)) - f(g'(\alpha))$

Γ. $f(g(\beta)) - f(g(\alpha))$ **Δ.** $g(\beta) - g(\alpha)$ **Ε.** $f(\beta) - f(\alpha)$

18. Το $\int_{\alpha}^{\beta} e^{x^2}dx$ είναι πάντα

Α. θετικό **Β.** αρνητικό **Γ.** ίσο με το 0
Δ. θετικό αν β > α **Ε.** είναι θετικό αν β < α

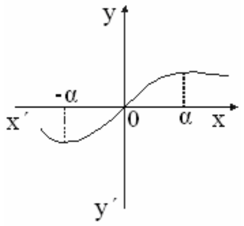
19. Για τη συνάρτηση f του διπλανού σχήματος το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με



Α. $E_1 + E_2$ **Β.** $\frac{1}{2}(E_2 - E_1)$ **Γ.** $2E_1 + E_2$

Δ. $\frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ **Ε.** $E_2 - E_1$

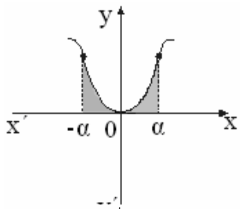
20. Έστω f μια περιττή συνάρτηση. Τότε το ολοκλήρωμα I = $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$ είναι ίσο με



Α. 2 **Β.** $2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ **Γ.** 0

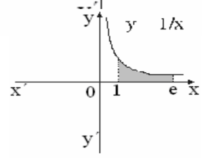
Δ. 2α **Ε.** $-2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$

21. Έστω f μια άρτια συνάρτηση. Τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



Α. 2 **Β.** $2\int_{0}^{\alpha} f(x)\,dx$ **Γ.** 0

Δ. 2α **Ε.** $-2\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx$

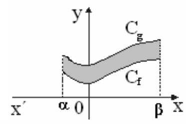


22. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με
Α. e **Β.** e - 1 **Γ.** 1
Δ. 1 - e **Ε.** 2e

23. Οι συναρτήσεις f και g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και f (x) ≤ g (x) για κάθε x ∈ R. Από τις παρακάτω προτάσεις:
I. $f'(x) \le g'(x)$ για κάθε x ∈ R
II. $f''(x) \le g''(x)$ για κάθε x ∈ R
III. $\int_{0}^{2} f(x)\,dx \le \int_{0}^{2} g(x)\,dx$ αληθεύουν

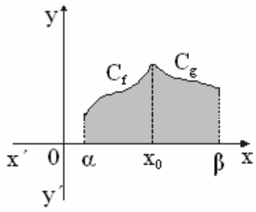
Α. όλες **Β.** καμία **Γ.** μόνο η I **Δ.** μόνο η III **Ε.** μόνο οι I και II

24. Αν g (x) = f (x) + 1, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου είναι ίσο με



Α. $\alpha\cdot f(\beta) - \beta\cdot f(\alpha)$ **Β.** β - α **Γ.** α·β **Δ.** 1 τ.μ.
Ε. κανένα από τα προηγούμενα

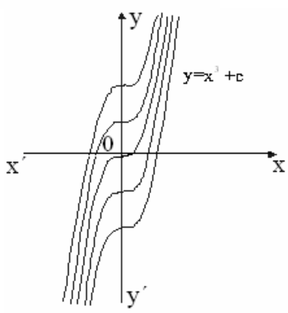
25. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου που φαίνεται στο διπλανό σχήμα είναι ίσο με



Α. $\int_{\alpha}^{\beta}(g(x)f(x))dx$ **Β.** $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))dx$ **Γ.** $\int (f(x) - g(x))dx$

Δ. $\int_{\alpha}^{x_0} f(x)\,dx - \int_{\beta}^{x_0} g(x)\,dx$ **Ε.** τίποτα από τα παραπάνω

26. Οι καμπύλες του σχήματος παριστάνουν συναρτήσεις του συνόλου

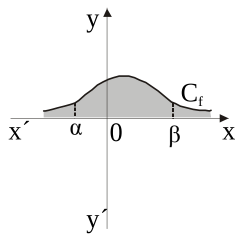


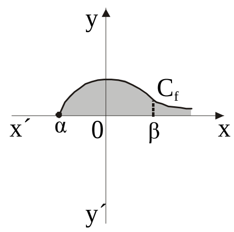
Α. $\int x^3dx$ **Β.** των παραγουσών της $f(x) = 3x^2$

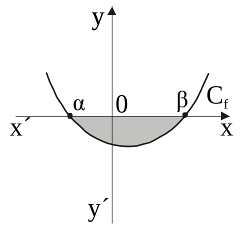
Γ. $\int x^4dx$ **Δ.** $\int (3x^2 + 2)\,dx$

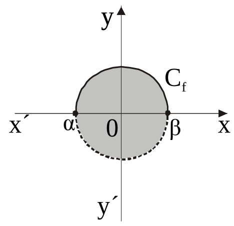
Ε. τίποτα από τα παραπάνω

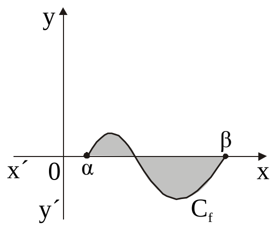
27. Το $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ μας δίνει το εμβαδόν του σκιασμένου τμήματος στο σχήμα

Α. 

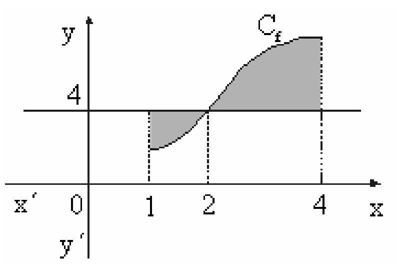
Β. 

Γ. 

Δ. 

Ε. 

28. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α. $\int_1^4 f(x)\,dx$ **Β.** $\int_1^4 (-f(x))\,dx$

Γ. $\int_1^4 (f(x)-4)\,dx$ **Δ.** $\int_1^4 (4-f(x))\,dx$

Ε. $\int_1^2 (4-f(x))\,dx + \int_2^4 (f(x)-4)\,dx$

29. Το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln x\,dx$ ισούται με

Α. e **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** e-1 **Ε.** e+1

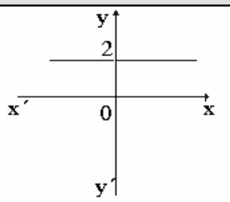
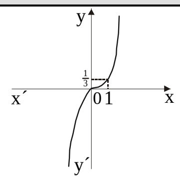
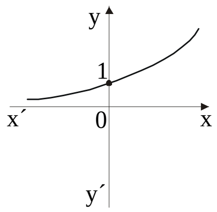
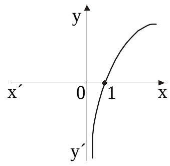
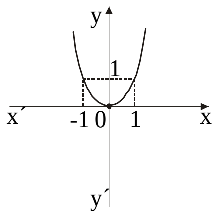
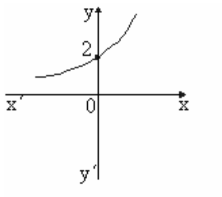
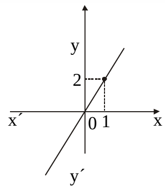
30. Το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x\,dx$ ισούται με

Α. π **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** 0 **Ε.** 1/2

31. Το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ ισούται με

Α. e **Β.** 2 **Γ.** 1 **Δ.** 0 **Ε.** 1/2

1. Αντιστοιχίστε σε κάθε γρ. παράσταση συνάρτησης f τη γρ. παράσταση της παράγουσας της.

Συνάρτηση f	***Παράγουσα F***
1. 	**α.** 
2. 	**β.** 
3. 	**γ.** 
	δ. 

2. Αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της Α με την παράγωγό της στη στήλη Β,

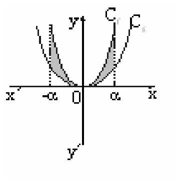
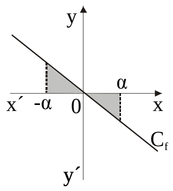
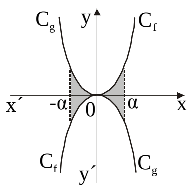
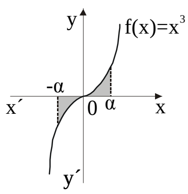
Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $F(x) = \int_{-1}^{x+3} ημ(t+2)\,dt$	**α.** $f(x) = -ημ(x+2)$
2. $F(x) = \int_{α}^{x^2} \ln(u+1)\,du$	**β.** $f(x) = ημ(x+2)$
3. $F(x) = \int_{0}^{x} t\ln(t^2+1)\,dt$	**γ.** $f(x) = 2x\ln(x^2+2)$
4. $F(x) = \int_{x+2}^{-1} ημt\,dt$	**δ.** $f(x) = ημ(x+5)$
5. $F(x) = -\int_{x^2}^{1} \ln(u+2)\,du$	**ε.** $f(x) = x\ln(x^2+1)$
	ζ. $f(x) = \ln(x^2+2)$
	η. $f(x) = 2x\ln(x^2+1)$
	θ. $f(x) = ημ(x+3)$

3. Στη στήλη Α φαίνονται οι παράγουσες κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι συναρτήσεις αυτές. Να κάνετε την αντιστοίχιση.

Στήλη Α	**Στήλη** Β
παράγουσα *F*	**συνάρτηση** *f*

1. $\frac{1}{3}$ συν3x + 3	**α.** $\frac{1}{3}$ ημ3x
	β. 2^x ln2
2. εφx + ln2	**γ.** $\frac{1}{συν^2x}$
3. ln |3x - 2| + 2	**δ.** e^{2x+3}
	ε. - ημ3x
4. e^{2x+3}	**ζ.** $\frac{3}{3x-2}$
5. 2^x	**η.** $\frac{2}{3x-2}$
6. $\frac{2^x}{\ln 2}$	**θ.** 2^x
	ι. $2e^{2x+3}$

4. Αντιστοιχίσετε το εμβαδόν κάθε χωρίου της στήλη Α στον τύπο που το υπολογίζει και υπάρχει στη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. 	**α.** $Ε = \int_{-α}^{0}(g(x) - f(x))\,dx + \int_{0}^{α}(f(x) - g(x))\,dx$
	β. $Ε = \int_{-α}^{0}(f(x) - g(x))\,dx + \int_{0}^{α}(g(x) - f(x))\,dx$
2. 	**γ.** $Ε = \int_{-α}^{α}(f(x) - g(x))\,dx$
3. 	**δ.** $Ε = \int_{-α}^{α} f(x)\,dx$
	ε. $Ε = -2\int_{-α}^{0} f(x)\,dx$
4. 	**ζ.** $Ε = \int_{-α}^{0} f(x)\,dx - \int_{0}^{α} f(x)\,dx$

5. Αντιστοιχίστε σε κάθε παράγουσα F τη συνάρτηση f.

παράγουσα *F*	**συνάρτηση *f***
1. $F(x) = x + c$	**α.** $f(x) = εφx$
2. $F(x) = 2\sqrt{x} + c$	**β.** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$
	γ. $f(x) = e^x$
3. $F(x) = εφx + c$	**δ.** $f(x) = \frac{1}{συν^2x}$
4. $F(x) = -\ln\lvert συνx\rvert + c$	**ε.** $f(x) = 1$
5. $F(x) = \frac{1}{x} + c$	**ζ.** $f(x) = -\frac{1}{ημ^2x}$
	η. $f(x) = \ln x$
6. $F(x) = x\ln x - x + c$	**θ.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
	ι. $f(x) = σφx$

6. Αντιστοιχίστε σε κάθε ολοκλήρωμα της στήλη Α τον αριθμό της στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $\int_{-1}^{2} \lvert x-1\rvert dx$	**α.** e – 2
	β. e - 1
	γ. 5/2
2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{συνx}{\sqrt{ημx}} dx$	**δ.** e +1
3. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2} dx$	**ε.** 2
4. $\int_{0}^{1} e^x x^2 dx$	**ζ.** 1
	η. 1/3
5. $\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2-5x+6} dx$	**θ.** ln2
6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ημx \cdot e^{συνx} dx$	**ι.** -2ln2

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

$\int f(x)\,dx$	**F (x) + c**	**(F (x) + c)΄ = f (x)**
$\int (2x+5)\,dx$		
$\int (x^3+x^2+1)\,dx$		
$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)dx$		
$\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$		
$\int (2ημx - 3συνx)\,dx$		
$\int \left(\frac{1}{ημ^2x}+\frac{1}{συν^2x}\right)dx$		
$\int (x+1)^9\,dx$		
$\int (x^2-3x+5)^2(2x-3)\,dx$		
$\int ημxσυν^3x\,dx$		
$\int xe^{x^2+1}\,dx$		
$\int \frac{1}{2x+1}\,dx$		
$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx$		
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$		

2. Έστω f μια …………………… συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια …………… της f στο [α, β], τότε $\int_a^{....} f(t)dt =$ ………………… Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως το **Θεμελιώδες θεώρημα ……………………………………………………………………**

3. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ. **Αρχική συνάρτηση** ή **παράγουσα της f στο Δ** ονομάζεται κάθε συνάρτηση F παραγωγίσιμη στο Δ ώστε να ισχύει : ……………………………

4. Για κάθε συνάρτηση f, παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ ισχύει:

$\int f'(x)dx =$ ……………………………

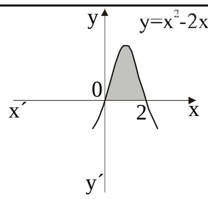
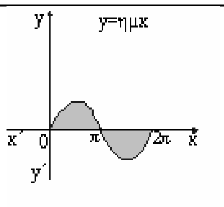
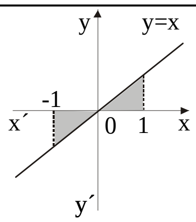
5. $\int f(x)g'(x)dx =$ ……………… - $\int$….. ………..

6. $\int_a^{\beta} f(x)dx = -\int_{...}^{...} f(x)dx$

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση f	**Παράγουσα της f, F**	$\int_\alpha^\beta \mathbf{f\,(x)\,dx}$
$f\,(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F\,(x) = 2\sqrt{x}$	$\int_1^2 f\,(x)\,dx = F\,(2) - F\,(1)$
$f\,(x) = ημ2x$		$\int_0^\pi f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = e^{3x}$		$\int_0^1 f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = \dfrac{1}{ημ^2 x}$		$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = \ln x$		$\int_1^e f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = \dfrac{1}{x-1}$		$\int_0^{1/2} f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = x^3 + 1$		$\int_{-2}^3 f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$		$\int_1^2 f\,(x)\,dx =$ ....
$f\,(x) = c$		$\int_\alpha^\beta f\,(x)\,dx =$ ....

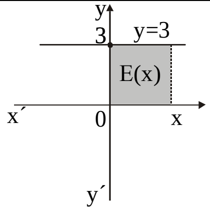
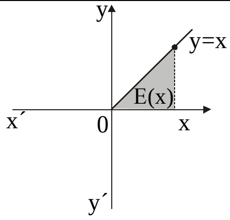
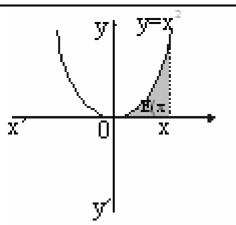
8. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Συνάρτηση	**Εμβαδόν σκιασμένου χωρίου**
	
	
	

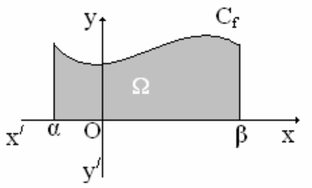
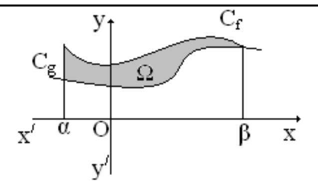
9. $\int_a^a f(\omega)d\omega =$ ....

10. $\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]_{\ldots\ldots}^{\ldots\ldots} - \int_a^\beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dx$

11. Στη στήλη Α φαίνονται κάποια σκιασμένα χωρία. Να συμπληρώσετε στη στήλη Β τα τμήματα των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης F (x) στο διάστημα [0, 3].

Στήλη Α	**Στήλη Β**
	
	
	

12. Να συμπληρώσετε στη στήλη Β τα ολοκληρώματα που αντιστοιχούν στα εμβαδά των σκιασμένων χωρίων της στήλης Α.

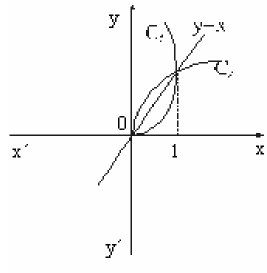
Στήλη Α	**Στήλη Β**
	**Ε(Ω)=**
	**Ε(Ω)=**

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

1. Τα παρακάτω ολοκληρώματα αναφέρονται στις συναρτήσεις του διπλανού σχήματος. Να τα γράψετε σε μια σειρά από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.

$E_1 = \int_0^1 x dx$ $\qquad E_2 = \int_0^1 f(x) dx$

$E_3 = \int_0^1 g(x) dx$ $\qquad E_4 = \int_0^1 (x - g(x)) dx$



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{x-1}^{0} \frac{t}{e^t} dt$. Να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά τις τιμές της συνάρτησης f (1), f (2), f (3).

1. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο R, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $G(x) = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$ είναι μια παράγουσα της h (x) = f (αx + β), α ≠ 0 στο R.

2. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f.

i. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$.

ii. Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας.

3. Αν P (t) είναι ο πληθυσμός μιας χώρας, όπου t ο χρόνος σε έτη, ένας «νόμος της αύξησης» εκφράζεται από τη σχέση P΄(t) = κ P(t) (1), όπου κ > 0 σταθερά που εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση P (t) είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο:

i. να λύσετε την εξίσωση (1).

ii. Αν υποθέσουμε ότι για τον πληθυσμό της Ελλάδας ισχύει ο νόμος της αύξησης από το 1920 και μετά, που ο πληθυσμός ήταν 5.000.000 και ότι το 1990 ο πληθυσμός ήταν 10.000.000, να βρεθεί η σταθερά κ για την Ελλάδα.

iii. Αν υποθέσουμε ότι οι συνθήκες διαβίωσης δεν θα μεταβληθούν σημαντικά, να «προβλεφθεί» ο πληθυσμός της Ελλάδας το έτος 2010.

4. Προφανώς $\int_{-2}^{1} 2x^2\,dx > 0$. Αλλά $I = \int_{-2}^{1} 2x^2\,dx = \int_{-2}^{1} x \cdot 2x\,dx$.
Θέτουμε $u = x^2$, οπότε du= 2xdx, ενώ για x = 1 είναι u = 1 και για x = - 2 είναι u = 4.
Άρα $I = \int_{4}^{1} \sqrt{u}\,du = -\int_{1}^{4} \sqrt{u}\,du < 0$. Πού βρίσκεται το λάθος;

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{1}^{x} (t^{1997} + t^{1999} + t^{2001} + t^{2003} + t)\,dt$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{\pi/6}^{2x} \frac{\eta\mu t}{t}\,dt$, με x > 0.

i. Να υπολογιστεί η f΄(x).

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία y = x.

7. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (x-1)\int_{2}^{x} \frac{\ln t}{t}\,dt$, x > 0.

i. Να αποδείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη.

ii. Να αποδείξετε ότι μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα του Rolle για την h στο [1, 2].

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (1, 2) τέτοιο ώστε $\frac{1-\xi}{\xi} \ln\xi = \int_{2}^{\xi} \frac{\ln t}{t}\,dt$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + e^{-x}$, $g(x) = x - e^{-x}$.

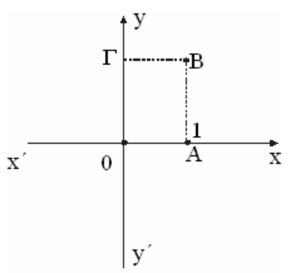
i. Να βρείτε το πρόσημο της f (x) - g (x) και της f (x) - x στο διάστημα [0, + ∞).

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g, x = 0 και x = 2.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, x = 0, x = 2, και y = x.

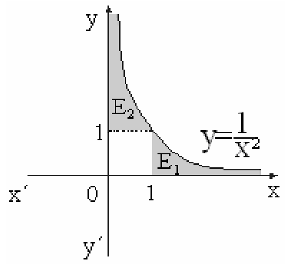
9. Δίνεται η $f(x) = \int_{0}^{x} (t^2 + 1)\,dt$. Να υπολογιστούν: το f΄(0), το f(1) και το f΄΄(1).

10. α)Να κατασκευάσετε το τμήμα μιας καμπύλης με **αρχή** πάνω στον άξονα y΄y και **τέλος** το Β ώστε το **εμβαδόν** κάτω από την καμπύλη και μεταξύ των ευθειών y = 0 και x = 1 να είναι ίσο με το εμβαδόν του ορθογωνίου ΟΑΒΓ. Είναι δυνατόν η καμπύλη να παριστάνει γνησίως μονότονη συνάρτηση;



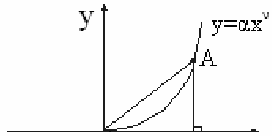
β)Να παρατηρήσετε ότι η πρόταση: «Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] και ισχύει $\int_0^1 f(x)\,dx = f(1)$ δείξτε ότι η f διαθέτει ένα τουλάχιστον σημείο τοπικού ακροτάτου στο διάστημα (0, 1)» απαντά στο ερώτημα (α) και να την αποδείξετε.

11. α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2.
β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο,
π.χ.:για το E_1: θεωρήστε λ > 1 και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} \frac{1}{x^2}\,dx$ και για το E_2: 0 < λ < 1 και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \int_{\lambda}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$.

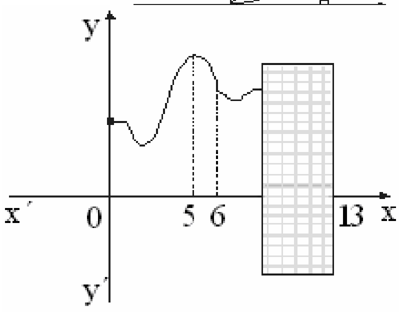


Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β); Μπορείτε να δικαιολογήσετε τα αποτελέσματά σας γεωμετρικά;

12. Έστω μια πολυωνυμική συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha x^{\nu}$, α > 0, x ≥ 0 και τα σημεία Α (x1, f (x1)) και Β (x1, 0). Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία η C_f να χωρίζει το τρίγωνο ΟΑΒ σε δύο ισεμβαδικά χωρία;



13. Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο [0, 13] και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων:



i. $\int_5^{12} f'(x)\,dx$

ii. $\int_0^{13} f(x)\,dx$

iii. $\int_5^{6} f''(x)\,dx$

14. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο [α, β].

i. Αν η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα [α, β] και είναι γνησίως αύξουσα τότε να αποδείξετε ότι:
$(\beta - \alpha)\, f(\alpha) \le \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le (\beta - \alpha)\,\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}$

ii. Αν η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο [α, β] και είναι γνησίως αύξουσα ποια θα είναι η αντίστοιχη σχέση;

iii. Αν $I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$, να δείξετε ότι το I ανήκει στο διάστημα (1, 1,21).

15. Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x = α σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη x = β γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f΄΄ είναι συνεχής στο [α, β], να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\,dx$.

16. Κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 12 ωρών η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς C τη χρονική στιγμή t (μετρημένη σε ώρες από την αρχή της περιόδου) είναι $T(t) = 25 + 0{,}3t - 0{,}05t^3$.

i. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η θερμοκρασία γίνεται μέγιστη.

ii. Ποια είναι η μέγιστη θερμοκρασία;

iii. Να βρείτε τη μέση θερμοκρασία κατά τη διάρκεια της περιόδου.

17. Αν η συνάρτηση f, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης:
$\int_{\alpha}^{\beta} f''(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,dx$

18. Θεωρείται γνωστό ότι ο ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μια είδηση σε μια πόλη με συνολικό πληθυσμό Α είναι ανάλογος του αριθμού των κατοίκων που δεν γνωρίζουν την είδηση. Να εκφράσετε τον αριθμό των κατοίκων που έχουν πληροφορηθεί την είδηση ως συνάρτηση του χρόνου t.

19. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το I = $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2 < 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού f (x) ≥ 0. Πού βρίσκεται το λάθος;

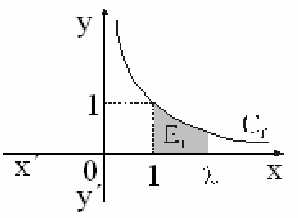
20. Θέλουμε να υπολογίσουμε το I = $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\text{συν}2x}{2}}\,dx$. Γράφουμε:

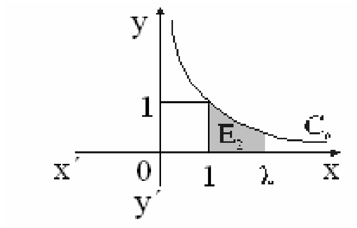
I = $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2\text{συν}^2 x}{2}} = \int_0^{\pi} \text{συν}x\,dx = 0$. Όμως η συνάρτηση f (x) = $\sqrt{\frac{1+\text{συν}2x}{2}}$ είναι μη αρνητική στο διάστημα [0, π], άρα δεν μπορεί να μηδενιστεί το I. Πού βρίσκεται το λάθος;

21. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

i. $\int_0^{\pi} \text{ημ}2x\,dx = 0$ **ii.** $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9\pi}{2}$ **iii.** $\int_1^2 (2x+1)\,dx = 4$ **iv.** $\int_{1/2}^{5} \ln x\,dx < \int_1^5 \ln x\,dx$

22. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f (x) = $\frac{1}{x}$, x > 0 και g (x) = $\frac{1}{x^2}$, x > 0.





i. Να βρείτε τα εμβαδά E_1 και E_2.

ii. Να βρείτε τα όρια: $I_1 = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} f(x)\,dx$ και $I_2 = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_1^{\lambda} g(x)\,dx$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = 1 + $\frac{1}{x^2}$.

i. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

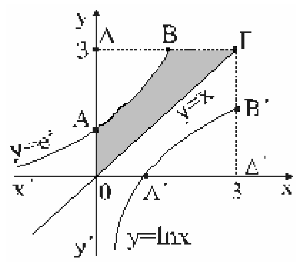
ii. Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \leq 2$.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 2 και x = 4.

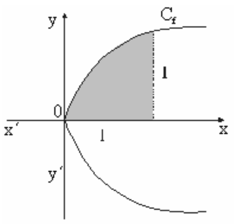
iv. Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

24. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Α΄Β΄Δ΄.

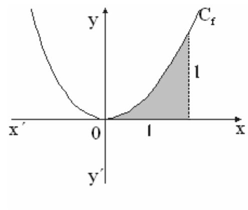
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



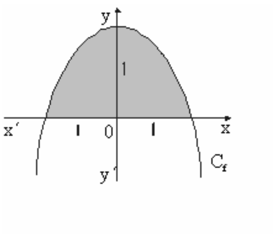
25. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα η καμπύλη C_f είναι παραβολή. Να υπολογίσετε τα σκιασμένα εμβαδά.



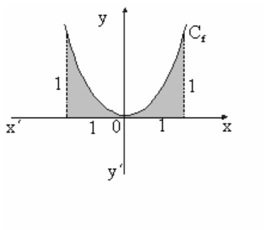
Α



Β



Γ



Δ

26. Δίνεται η συνάρτηση $f: R^* \to (0, +\infty)$ για την οποία ισχύουν $f(x) = x^2 f'(x)$ και $f(1) = \frac{2004}{e}$.

i. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2004 \cdot e^{-\frac{1}{x}}$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 1 και x = 2.

27. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = e^x$.

i. Να βρείτε μια άρτια f και μια περιττή συνάρτηση g στο R, τέτοιες ώστε $f(x) + g(x) = h(x)$.

ii. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα των f, g.

iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τις f, g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \lambda > 1$.

iv. Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

28. Έστω η τρις φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^{(3)}(x) + f'(x) + f(x) = 0$ $x \in R$.

i. Αν η $g(x) = [f''(x)]^2 + [f'(x)]^2 + 2f(x)f'(x)$ είναι σταθερή τότε και η f είναι σταθερή.

ii. Αν $f''(1) + f(1) = -1$ και $f''(0) + f(0) = 1$ να υπολογίσετε το $\int_1^0 f(x)dx$.

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - \ln x, \;\; x > 0$.

i. Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο $x_0 = 1$.

iii. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, την παραπάνω εφαπτόμενη και την ευθεία $x = e$.