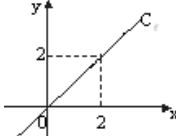
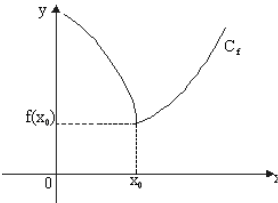
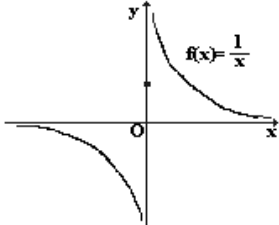
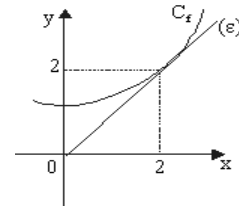


1. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
2. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$.
4. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, τότε η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
5. Αν $f(x) = e^x$, τότε $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$.
6. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
7. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.
8. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f .
9. Αν μια ευθεία (ε) έχει με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης μόνο ένα κοινό σημείο, τότε είναι οπωσδήποτε εφαπτομένη της.
10. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$. Τότε η γραφική της παράσταση δεν δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
11. Για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = (x - 2)^2 e^x$. Τότε η C_f στο σημείο $(2, f(2))$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
12. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f δίνεται στο σχήμα. Η παράγωγος της f στο $x_0 = 2$ είναι ίση με 1.
- 
13. Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα, έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$.
- 
14. Οι εφαπτομένες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$, $h(x) = x^2 - 20$ στα σημεία τομής τους με την ευθεία $x = x_0$, είναι παράλληλες.
15. Η συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα, έχει παράγωγο στο $x_0 = 0$.
- 
16. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
17. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = ax + \beta$, σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της, συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
18. Αν δυο συναρτήσεις τέμνονται, τότε στο κοινό τους σημείο δέχονται κοινή εφαπτομένη.

19. Η ευθεία στο σχήμα (ε) είναι εφαπτομένη της C_f . Ισχύει $f'(2) = 1$.



20. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0 .

21. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 2, τότε $[f(2)]' = f'(2)$.

22. α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε θα είναι συνεχής στο x_0 .

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν είναι συνεχής στο x_0 .

23. Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$.

24. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε ισχύει $(f(f(x)))' = (f'(x))^2$.

25. Αν το άθροισμα $f + g$ δύο συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 , τότε και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 .

26. Αν η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες.

27. Ισχύει $\left. \frac{dc}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$, όπου c σταθερά και $x_0 \in \mathbb{R}$.

28. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ισχύει

α) αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή

β) αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια

γ) αν η f είναι περιοδική, τότε η f' είναι περιοδική με την ίδια περίοδο.

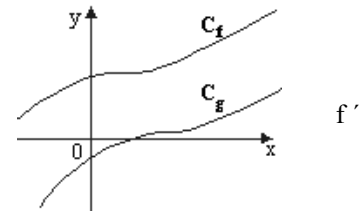
29. Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική n -οστού βαθμού, τότε η συνάρτηση f' είναι επίσης πολυωνυμική $n-1$ βαθμού.

30. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} .

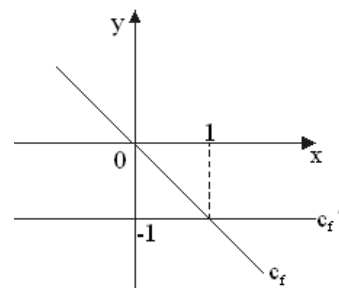
31. Αν $y = ax + \beta$, τότε ο ρυθμός μεταβολής των τιμών του y εξαρτάται από τις τιμές της μεταβλητής x .

32. Αν $f'(x) = 3x^2$, τότε ισχύει πάντα $f(x) = x^3$.

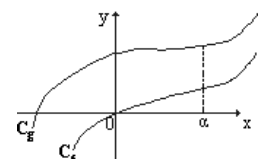
33. Στο σχήμα η γραφική παράσταση της g προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της C_f . Ισχύει $f(x) = g'(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού τους.



34. Έστω $f(x) = -x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και f' είναι αυτές που φαίνονται στο σχήμα.



35. Αν η γραφική παράσταση της g προκύπτει από την C_f με κατακόρυφη μετατόπιση και ισχύει $f'(a) = 2$, τότε θα είναι και $g'(a) = 2$.



36. Σε κάθε χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση αυτού.

37. Αν $f(x) = x^4$, τότε υπάρχουν σημεία της C_f με παράλληλες εφαπτομένες.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΑΠΛΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ

1. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f έχει εφαπτομένη στο x_0 την ευθεία $y = ax + \beta$, με $a \neq 0$, όταν

A. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \in \mathbb{R}$

B. η f είναι συνεχής στο x_0

Γ. η f δεν είναι συνεχής στο x_0

A. το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $+\infty$

E. το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι $-\infty$

2. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2$, τότε

A. η f δεν ορίζεται στο $x_0 = 0$

B. $f'(0) = 2$

Γ. $f'(2) = 0$

A. η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

E. δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω

3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -x^3 + 5$ στο σημείο A (1, 4) είναι

A. 5

B. -5

Γ. -3

A. 3

E. 2

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο A ($x_0, f(x_0)$), όταν

A. η f είναι συνεχής στο x_0

B. το x_0 είναι άκρο του πεδίου ορισμού της f

Γ. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$

A. είναι $f'(x_0) = 0$

E. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$

5. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε

A. το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

B. το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ δεν υπάρχει

Γ. το $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

A. το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

E. τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι άνισα

6. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη

A. στο πεδίο ορισμού της

B. στο $x_0 = 0$

Γ. στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

A. στο $(0, +\infty)$

E. σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 0$, τότε η γρ. της παράσταση στο σημείο A ($x_0, f(x_0)$) δέχεται

A. κατακόρυφη εφαπτομένη

B. καμία εφαπτομένη

Γ. οριζόντια εφαπτομένη

A. εφαπτομένη της μορφής $y = ax + \beta$, $a \neq 0$

E. εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$

8. Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε **λάθος** είναι ότι

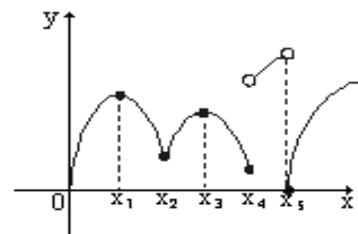
A. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_1

B. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_2

Γ. η C_f δέχεται εφαπτομένη στο x_3

A. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_4

E. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_5

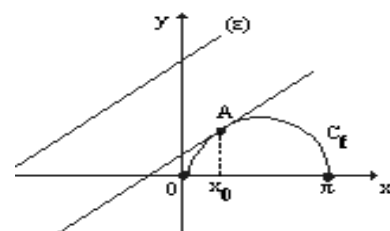


9. Η γρ. παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$

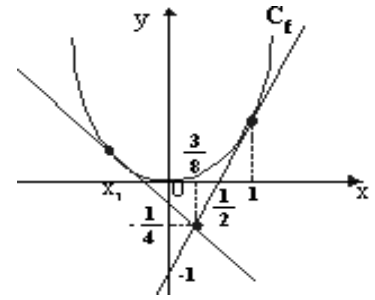
και της ευθείας (ϵ) $\lambda = \frac{1}{2}$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το σημείο A ($x_0, f(x_0)$) στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ) έχει τεταγμένη

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ Γ. $\frac{\pi}{3}$ A. $\frac{\pi}{2}$ E. $\frac{3\pi}{4}$

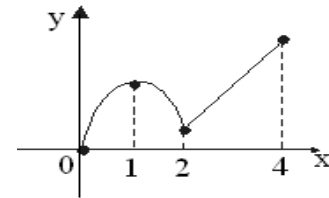


10. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ και οι εφαπτομένες στα σημεία της με τετμημένες 1 και x_1 . Αν οι εφαπτομένες αυτές είναι κάθετες, τότε το x_1 είναι



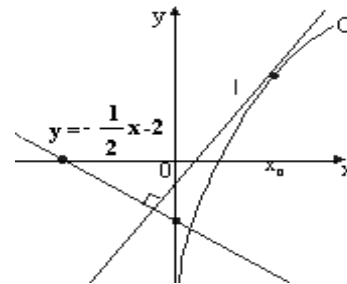
- A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ Γ. $-\frac{1}{3}$
 Δ. $-\frac{3}{2}$ E. -1

11. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει λύση την



- A. $x = 0$ B. $x = 1$
 Γ. $x = 2$ Δ. $x = 4$
 E. καμία από τις παραπάνω

12. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι κάθετη στην ευθεία



- $y = -\frac{3}{2}x - 2$. Το x_0 είναι
 A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ Γ. 2
 Δ. $\frac{5}{2}$ E. 3

13. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x_0) = g'(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε

- A. $f(x_0) = g(x_0)$ B. $x_0 \neq 0$ Γ. $f''(x_0) = g''(x_0)$
 Δ. οι εφαπτομένες των C_f, C_g στα $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0, g(x_0))$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες
 E. $f'(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

14. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x_0) = 2$. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ με τον άξονα x είναι περίπου

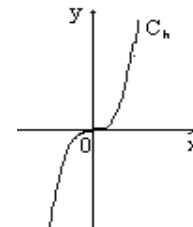
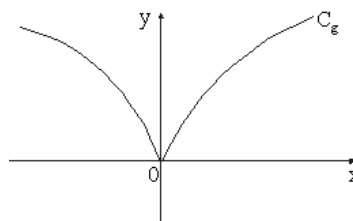
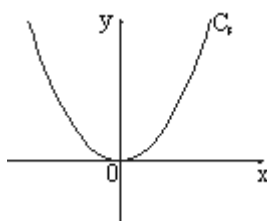
- A. -64° B. $27,3^\circ$ Γ. $63,4^\circ$ Δ. 89° E. $106,4^\circ$

15. Για τη συνεχή συνάρτηση f στο \mathbb{R} , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$. Από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι

σωστή η

- A. Η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$ την ευθεία $x = x_0$
 B. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = +\infty$ Γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0
 Δ. Δεν ορίζεται η $f'(x_0)$ E. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



Στο σημείο $x_0 = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση

- A. f B. g Γ. h Δ. όλες E. καμία

17. Ο τύπος $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) g'(x_0)$ ισχύει, όταν

- A. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0
 B. η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$
 Γ. η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$

Α. οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο $g(x_0)$

Ε. οι f και g είναι συνεχείς στο $g(x_0)$

18. Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = -3\eta\mu 3x$ η

Α. $g(x) = \sin^3 x$

Β. $h(x) = \sin x^3$

Γ. $\varphi(x) = 3\sin x$

Δ. $s(x) = \sin 3x$

Ε. $\sigma(x) = \sin \frac{x}{3}$

19. Από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει παράγωγο την συνάρτηση $f(x) = \alpha^x \ln \alpha$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$, η

Α. x^α

Β. $\log_\alpha x$

Γ. $e^{\alpha \ln x}$

Δ. $\log x^\alpha$

Ε. α^x

20. Για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο διάστημα $[0, \pi]$ ισχύει $g(x) = f(\eta\mu x)$. Η τιμή $g'(\frac{\pi}{2})$ είναι:

Α. 1

Β. $f'(1)$

Γ. 0

Δ. $f'(\frac{\pi}{2})$

Ε. $\frac{\pi}{2} f'(\frac{\pi}{2})$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$. Η 5η παράγωγος της f είναι

Α. -1

Β. 4

Γ. x

Δ. 0

Ε. 24

22. Αν $f(x) = e^{2x}$, τότε η $f^{(v)}(x)$ θα ισούται με

Α. e^{2x}

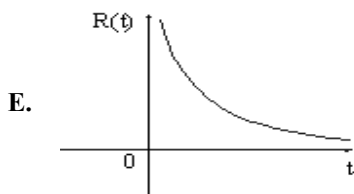
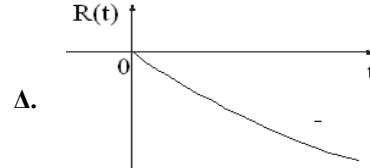
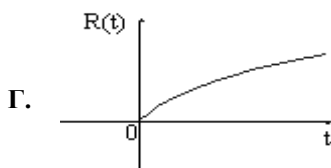
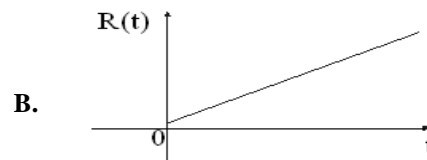
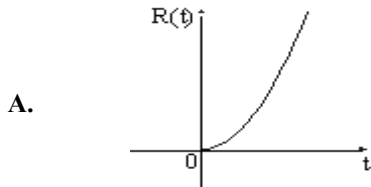
Β. e^{vx}

Γ. $(e^{2x})^v$

Δ. $2^v e^{2x}$

Ε. ve^{2x}

23. Ένα σφαιρικό μπαλόνι φουσκώνει με σταθερή παροχή αέρα. Τότε η ακτίνα του R συναρτήσει του χρόνου μπορεί να δίνεται από τη γραφική παράσταση



24. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Η εφαπτομένη της στο σημείο $(0, 1)$ είναι η ευθεία

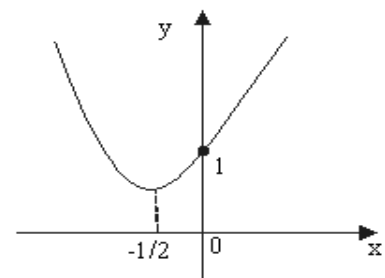
Α. $y = -x + 1$

Β. $y = x + 1$

Γ. $y = 1$

Δ. $x = 0$

Ε. καμία από τις παραπάνω



25. Οι συναρτήσεις f, g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο κοινό πεδίο ορισμού τους \mathbb{R} . Για να έχουν κοινή εφαπτομένη στο $A(1, 2)$, από τις παρακάτω συνθήκες:

I. $f'(1) = g'(1)$

II. $f(1) = g(1)$

III. f, g συνεχείς στο $x_0 = 1$

IV. $f''(1) = g''(1)$

απαραίτητες

Α. μόνο η I

Β. μόνο η II

Γ. οι I και II

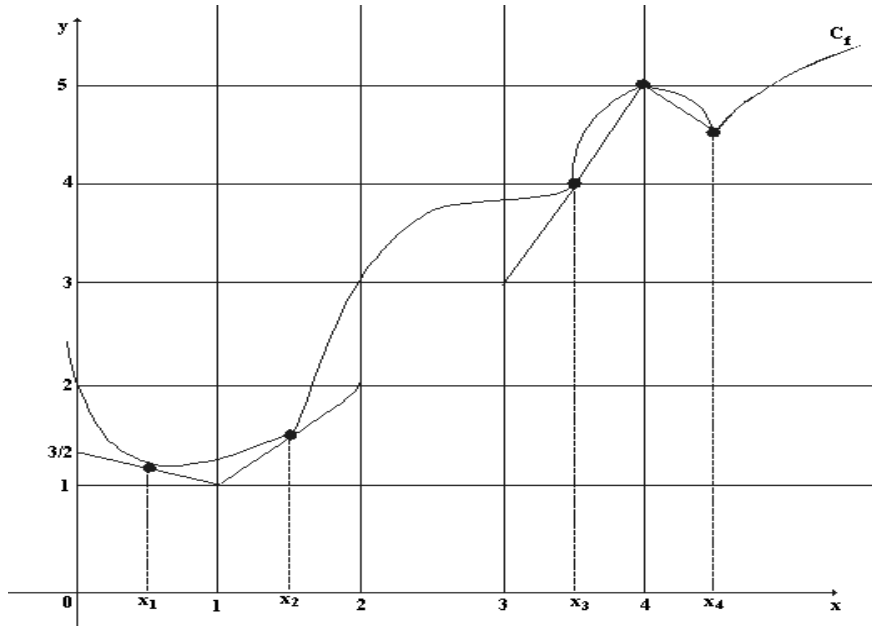
Δ. οι II και IV

Ε. όλες

είναι

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ

1. Με βάση το σχήμα να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.



τετμημένη σημείου	x_1	x_2	x_3	4	x_4
παράγωγος της f					

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

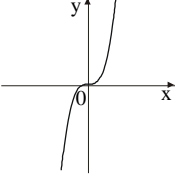
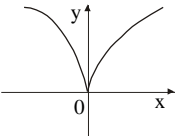
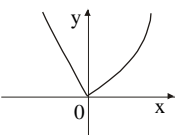
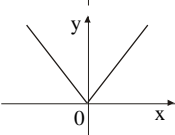
	γραφική παράσταση f		γραφική παράσταση f'
1.		1.	
2.		2.	
3.		3.	
4.		4.	
5.		5.	

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Συνάρτηση $f(x)$	Πηλίκο $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Όριο πηλίκου στο $h \rightarrow 0$
$f(x) = x$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$		
$f(x) = \sqrt{x}, x > 0$		
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0$		

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗΣ

1. Να αντιστοιχίσετε μία ή περισσότερες από τις γραφικές παραστάσεις που φαίνονται στη στήλη Α με την εφαπτομένη τους (αν υπάρχει) στο σημείο $(0, 0)$ που η εξίσωσή της γράφεται στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
<p>1. </p>	α. $y = 0$
<p>2. </p>	β. δεν υπάρχει
<p>3. </p>	
<p>4. </p>	

2. Όλες οι συναρτήσεις της στήλης Α διέρχονται από το $(1, 0)$. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης αυτής με το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της στο σημείο αυτό που υπάρχουν στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = x^2 - 1$	α. $-\frac{e^4}{2}$
2. $g(x) = -\frac{e^{5x}}{10e} + \frac{e^5}{10e}$	β. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $h(x) = \ln 2x - \ln 2$	γ. 1
4. $\varphi(x) = \frac{1}{x} - 1$	δ. $\sqrt{3}$
5. $s(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{3}$	ε. $-2e$
	ζ. 2
	η. -1

3. Η στήλη A περιέχει γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων και τις εφαπτομένες τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$. Σε κάθε σχήμα της στήλης A να αντιστοιχίσετε τη σχέση της στήλης B, η οποία ερμηνεύει αλγεβρικά στο συγκεκριμένο σχήμα, τη θέση της εφαπτομένης.

Στήλη A	Στήλη B
<p>1. </p>	<p>α. $f'(1) = 0$</p>
<p>2. </p>	<p>β. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 0$</p> <p>γ. $f'(1) > 0$</p>
<p>3. </p>	<p>δ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = +\infty$</p> <p>ε. $f'(1) < 0$</p>
<p>4. </p>	<p>ζ. $f'(1) > f'(0)$</p>

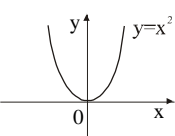
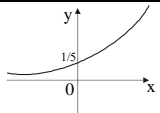
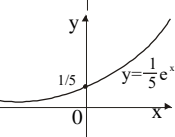
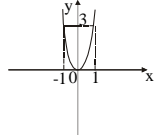
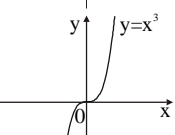
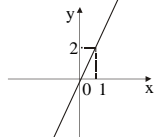
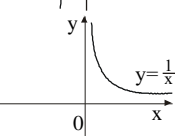
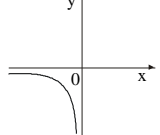
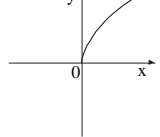
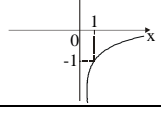
4. Στη στήλη A δίνονται οι γραφικές παραστάσεις παραγώγων συναρτήσεων f' . Στη στήλη B δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων f . Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση f' της στήλης A τη γραφική παράσταση από τη στήλη B.

Στήλη A γραφικές παραστάσεις f'	Στήλη B γραφικές παραστάσεις f
<p>1. </p>	<p>α. </p>
<p>2. </p>	<p>β. </p>
<p>3. </p>	<p>γ. </p> <p>δ. </p>

5. Σε κάθε σύμβολο της στήλης A να αντιστοιχίσετε το σύμβολο από τη στήλη B που έχει την ίδια σημασία.

Στήλη A	Στήλη B
1. $\frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$	α. $2 f(x) \cdot f'(x)$
2. $\frac{d^2 f}{dx^2}$	β. $f'(x)$
3. $\frac{df^2}{dx}$	γ. $f^2(x) \cdot f'(x)$
4. $\left(\frac{df}{dx}\right)^2$	δ. $f''(x)$
	ε. $(f'(x))^2$

6. Να αντιστοιχίσετε κάθε γραφική παράσταση συνάρτησης που φαίνεται στη στήλη A με τη γραφική παράσταση της παραγώγου της που φαίνεται στη στήλη B.

Στήλη A	Στήλη B
γραφικές παραστάσεις f	γραφικές παραστάσεις f'
1. 	α. 
2. 	β. 
3. 	γ. 
4. 	δ. 
	ε. 
	στ. 

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

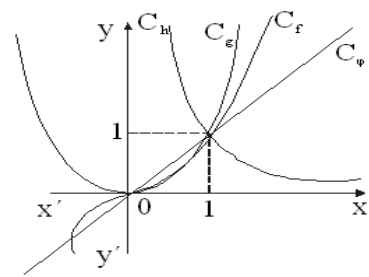
1. Να διατάξετε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$.

α) $f(x) = x^3$ β) $g(x) = x^2$ γ) $h(x) = \frac{1}{2}x$ δ) $\varphi(x) = 5$ ε) $\sigma(x) = \ln x$

2. Να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτόμενων των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων, στα αντίστοιχα σημεία τους.

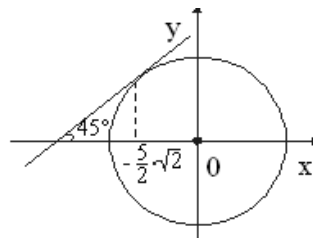
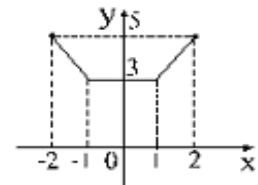
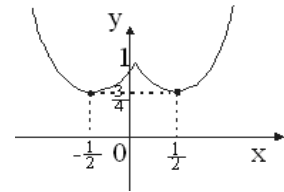
α) $f(x) = -5x + 4$ στο σημείο $(1, -1)$ β) $g(x) = 2^x$ στο σημείο $(0, 1)$
 γ) $h(x) = \sqrt{-x}$ στο σημείο $(-4, 2)$ δ) $\varphi(x) = \sin^2 2x$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 1)$
 ε) $\sigma(x) = \log_2 x$ στο σημείο $(1, 0)$

3. Τέσσερα κινητά κινούνται στον ίδιο άξονα και οι θέσεις τους σε κάθε χρονική στιγμή t δίνονται από τους τύπους $s_1(t) = \frac{1}{2}t^2$, $s_2(t) = 3\eta\mu \frac{\pi t}{2}$, $s_3(t) = 2t^3 - t^2$, $s_4(t) = t \ln t$. Να διατάξετε τις ταχύτητες των κινητών από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη τη χρονική στιγμή $t = 2$.
4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τεσσάρων συναρτήσεων f , g , h και φ . Να διατάξετε τους συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων τους στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$, κατά αύξουσα σειρά.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 1$.
2. Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.
3. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x-1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-3| + x + 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη
- στο σημείο $x_0 = 3$ και
 - στο σημείο $x_0 = 4$.
5. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
 - Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f' .
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
- Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετημμένες $-1, 1, 3/2$.
 - Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f' .
7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.
 - σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.
 - είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$.
 - άγεται από το σημείο $(-1, 0)$.
 - είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
 - είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.
8. Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:
- $f(x) = \ln x$ στο $(1, 0)$
 - $f(x) = |2-x|$ στο $(2, 0)$
 - $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο $(0, 0)$
 - $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο $(0, 0)$
 - $f(x) = x\sqrt{x}$ στο $(0, 0)$
 - $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο $(-2, \frac{3}{4})$
9. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.
10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$, $a \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.
11. i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 8$, να φέρετε τις εφαπτόμενες ϵ_1, ϵ_2 της C_f στα σημεία τομής της C_f με τον $x'x$ και να δικαιολογήσετε από το σχήμα γιατί οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.
- ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με $\Delta > 0$, στα σημεία τομής της με τον άξονα $x'x$ τέμνονται στον άξονα συμμετρίας της παραβολής.



12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(ax)}{x}$ με $a > 0$ και $x > 0$.

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.
- ii. Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το a , διέρχονται από το ίδιο σημείο.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

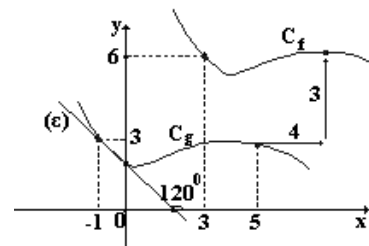
14. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση: $f(2+x) - f(2-x) = -2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y=x$.

15. Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x = x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Εφαρμογή: Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g

δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

16. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g .



- i. Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις f και g .
- ii. Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$
- iii. Να βρείτε την $g'(4)$.

17. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει $f(\ln x) = x \cdot \ln x - x$, $x > 0$.

- i. Να αποδείξετε ότι η $C_{f'}$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.
- iii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες x' και y' .

18. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(0, 1)$.

19. Να δείξετε ότι:

- i. αν $f(x) = 3\sin x - 2\cos 2x$, τότε $f'(x) + f(x) \cos x - \sin 2x = 0$.
- ii. αν $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$, τότε $x f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

20. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

- i. να βρεθεί ο τύπος της f .
- ii. να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

21. Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι:

- i. η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(0, 0)$.
- ii. $f''(0) = 0$.

22. Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή O τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t+1)$, $t > 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

- i. Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.
- ii. Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.
- iii. Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

23. Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει: $f(x+y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + a$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = -a$.
- ii. Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.
- iii. Να δείξετε ότι $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

24. Γνωρίζουμε ότι για $x \neq 1$ ισχύει: $\frac{x^{v+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^v$.

i. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1 + 2x + 3x^2 + \dots + v \cdot x^{v-1}$, $x \neq 1$.

ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $2 + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \dots + \frac{20}{2^{19}}$.

25. Εξηγήστε γιατί η παρακάτω διαδικασία οδηγεί σε άτοπο

$$x^4 = x \cdot x^3 = \underbrace{x^3 + x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ προσθετέοι}}, \text{ άρα } (x^4)' = \left(\underbrace{x^3 + x^3 + \dots + x^3}_{x \text{ φορές}} \right)', \text{ δηλαδή } 4x^3 = \underbrace{3x^2 + 3x^2 + \dots + 3x^2}_{x \text{ φορές}}, \text{ άρα}$$

$$4x^3 = 3x^3, \text{ επομένως } 4 = 3 \text{ !!!}$$

26. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$. Να βρεθεί το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτόμενη ευθεία:

i. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -12$.

ii. είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 4x$.

iii. σχηματίζει με τον x/x γωνία $\omega = \pi/4$.

iv. είναι κάθετη στην ευθεία $x - 2y + 1 = 0$.

v. περνάει από το σημείο $M(2,8)$.

27. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της C_f στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. στο σημείο $A(-1, -2)$.

ii. Που διέρχεται από το σημείο $B(-1, 5)$.

iii. ώστε να είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x = 1$.

iv. ώστε να είναι κάθετη στην ευθεία $2y - x = 2$.

v. ώστε να σχηματίζει με τον άξονα x/x γωνία $\omega = \pi/4$.

vi. ώστε να έχει συντελεστή διεύθυνσεως $\lambda = 6$.

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = (x^2 - x + 1)\eta\mu x$. Να αποδειχθεί ότι οι C_f και C_g εφάπτονται σε κάθε κοινό τους σημείο.

29. Έστω $f(x) = ax^2 + bx$.

i. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η αντίστοιχη καμπύλη να εφάπτεται στον άξονα x/x και στο σημείο $(0,0)$, αν $f(1) = 1$.

ii. Για τα a, b που θα υπολογισθούν, να βρεθούν οι ευθείες της μορφής $y = \lambda x - 1$ που εφάπτονται στην C_f .

30. Δίνεται η $f(x) = e^x$. Βρείτε ευθείες (ε_1) , (ε_2) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων με (ε_1) εφαπτόμενη της C_f και $(\varepsilon_2) \perp (\varepsilon_1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Αν ε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2a, 8a^2)$ $a > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C , την ευθεία ε και τον άξονα x/x .

ii. Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία MO , όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του a και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το a μεταβάλλεται ($a > 0$).

32. Έστω $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = 1$.

33. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x + 3} = 5$ να βρεθεί πολυωνυμική συνάρτηση f αν $f(0) = 2$ και η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = -1$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 3x - 2$.

34. Δίνετε η $f(x) = a \ln x - bx^2 - x - 1$. Να βρεθούν τα $a, b \in \mathbb{R}$, αν η εφαπτόμενη της C_f στο $x_0 = 2$ είναι παράλληλη στην $y = -11x + 1$ και αν παρουσιάζει σ.κ. στο $x_1 = 1$.

35. Έστω η $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ και C_f η γρ. της παράσταση τότε:

i. να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $x_0 = 1$

ii. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις τομές της εφαπτομένης με τους άξονες.

iii. να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $A(-2, 4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία του πρώτου ερωτήματος.

36. Δίνεται η $f(x)=x^4-2x^2+3$. Να δειχθεί:

i. η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον y/y .

ii. υπάρχουν 3 σημεία της C_f από τα οποία οι εφαπτόμενες της C_f είναι παράλληλες στον x/x .

37. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της συνάρτησης $f(x)=x^{\ln x}$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

38. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x4^x)$ όπου f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η ευθεία $\varepsilon: y=1/4x - 3$. Αν η (ε) εφάπτεται στο διάγραμμα της f στο σημείο $x_0 = 4$, τότε να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτόμενης της C_g στο σημείο $(1, g(1))$.

39. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 5x - 2$ και $g(x) = x^3 - 5$ έχουν κοινή εφαπτόμενη στο σημείο $A(-1, -6)$.

40. Να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 4$ και $g(x) = (x + \frac{4\sqrt{3}}{9})$ έχουν κοινή εφαπτόμενη η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

41. Δίνεται η $f(x)=\eta\mu 2x + \beta\sigma\upsilon\nu^2 x$ και η ευθεία $3y-\alpha x-15=0$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να περνάει από το σημείο $A(\pi, 3)$ και η εφαπτόμενη στο $x_0=\pi/4$ να είναι κάθετη στην παραπάνω ευθεία.

42. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της C_f της $f(x)=x^2-x+2$ που περνάνε από το σημείο $A(-1, -2)$.