

ΘΕΜΑ Α

A1. Χαρακτηρίστε κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις, σαν σωστή (Σ) ή λάθος(Λ) (μονάδες 5)

1. Εσωτερικά σημεία ενός διαστήματος Δ λέμε όλα τα σημεία του Δ , εκτός από τα άκρα.
2. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.
3. $\ln(x + y) = \ln x \cdot \ln y$.
4. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(x) = g(x)$.
5. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 1 τουλάχιστον λύση στο Δ .

A2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε ένα από τα παρακάτω: (μονάδες 10)

1. Αν D_f και D_g τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g τότε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ είναι:

A. $\{x \in D_f / g(x) \in D_g\}$

B. $\{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$

Γ. $\{x \in D_g / f(x) \in D_f\}$

Δ. $\{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$

2. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $-f$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία:

A. $x = 0$

B. $y = x$

Γ. $x'x$

Δ. $y'y$

E. $y = -x$

3. Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε:

A. η f είναι γνησίως αύξουσα

B. η f είναι γνησίως φθίνουσα

Γ. η f είναι άρτια

Δ. η f είναι 1-1

4. Αν η f είναι 1-1 τότε:

A. η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

B. η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως μονότονη.

Γ. η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μία το πολύ ρίζα

Δ. τίποτε από τα παραπάνω

5. Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\xi \in A$ όταν:

A. ισχύει $\xi \geq x$ για κάθε $x \in A$

B. ισχύει $f(\xi) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$

Γ. ισχύει $f(\xi) \geq f(x)$ για κάθε $x \in A$

Δ. υπάρχει $x \in A$ ώστε $f(\xi) \geq f(x)$

A3. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστή ή λάθος καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις δικαιολογώντας την απάντησή σας.

1. Μια συνάρτηση 1-1 είναι γνησίως μονότονη. (μονάδες 1+4)

2. Ισχύει $f \circ g \neq g \circ f$ (μονάδες 1+4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + x - 3}}{x - 1}$.

B1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης. (μονάδες 6)

B2. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η C_f τέμνει τον $x'x$. (μονάδες 5)

B3. Για ποιες τιμές του $x \in A$ η C_f βρίσκεται πάνω από τον $x'x$. (μονάδες 6)

B4. Σε ποια σημεία η C_f τέμνει την ευθεία $y = 2$;
(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + 1$, με $x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 5)

Γ2. Να βρείτε την f^{-1} . (μονάδες 10)

Γ3. Να χαράξετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} . (μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (μονάδες 6)

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση $e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$. (μονάδες 7)

Δ3. Να αποδείξετε ότι $e^e + e < e^\pi + \pi$. (μονάδες 6)

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x) = 0$ (μονάδες 6)