

ΘΕΜΑ Α

A1. Χαρακτηρίστε κάθε μιας από τις ακόλουθες προτάσεις, σαν σωστή (Σ) ή λάθος(Λ) (μονάδες 6)

1. Για να αναζητήσουμε το όριο στο x_0 θα πρέπει το x_0 να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
2. Αν $f(x) \leq 2023$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 2023$.
3. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm 1$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu ax}{x} = a$
5. Αν η εξίσωση $f(x) = y$ για κάθε $y \in f(A)$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς x τότε η f είναι 1 – 1
6. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ και $g(x) = f(x) - a$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

A2. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση για κάθε ένα από τα παρακάτω: (μονάδες 3)

1. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-1|-3}{x-2}$ ισούται με:
Α. 1 Β. 2 Γ. 3 Δ. 4 Ε. δεν υπάρχει
2. Η έκφραση "Η συνάρτηση f έχει μια ιδιότητα P κοντά στο x_0 " σημαίνει ότι η f είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής :
Α. $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ Β. (α, x_0) Γ. (x_0, β) Δ. ένα από τα Α, Β, Γ
3. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$
Α. δεν υπάρχει Β. $= +\infty$ Γ. $= -\infty$ Δ. ένα από τα Α, Β, Γ

A3. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις: (μονάδες 6)

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ τότε $\lim_{h \rightarrow \underline{\quad}} f(x_0 + \underline{\quad}) = l$
2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ και $g(x) \leq f(x)$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \underline{\quad}$
3. Οι απροσδιόριστες μορφές που προκύπτουν από άθροισμα συναρτήσεων είναι
4. Οι απροσδιόριστες μορφές που προκύπτουν από διαφορά συναρτήσεων είναι
5. Οι απροσδιόριστες μορφές που προκύπτουν από γινόμενο συναρτήσεων είναι
6. Οι απροσδιόριστες μορφές που προκύπτουν από πηλίκο συναρτήσεων είναι

A4. Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις.

1. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και $f(0) = 5$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$ (μονάδες 5)
2. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x-x_0)f(x)} = +\infty$$

(μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Β

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια.

B1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2}}{(x+2)^{2024}}$ (μονάδες 5)

B2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-x^2+2x-1}$ (μονάδες 5)

B3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-2x^2-2x-3}{(x-3)^3}$ (μονάδες 5)

B4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)^3}$ (μονάδες 5)

B5. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{(\pi-x)^5}$ (μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)f(y) = yf(x) + xf(y) - xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$ (μονάδες 4)

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 6)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^7}$ (μονάδες 6)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6f^2(x)+7f(x)+2}{3f^2(x)-f(x)-4}$ (μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 3$. Να υπολογίσετε τα όρια:

Δ1. $A = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (μονάδες 8)

Δ2. $B = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}f(x)-1}{x-1}$. (μονάδες 8)

Δ2. $\Gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x \cdot f(\sigma\upsilon\nu x) - 1}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$ (μονάδες 9)