1. Στο διπλανό σχήμα να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, όπου:

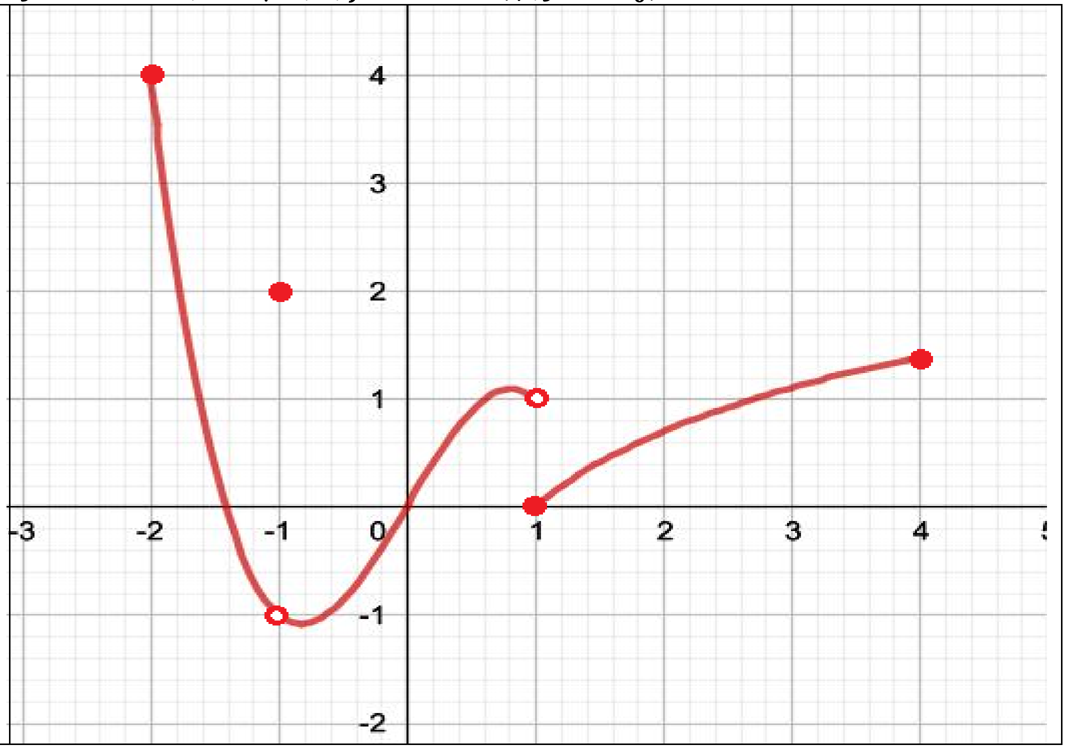
i. $x_0 = -2$

ii. $x_0 = -1$

iii. $x_0 = 0$

iv. $x_0 = 1$

v. $x_0 = 4$



2. Στο διπλανό σχήμα να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, όπου:

i. $x_0 = -4$

ii. $x_0 = -1$

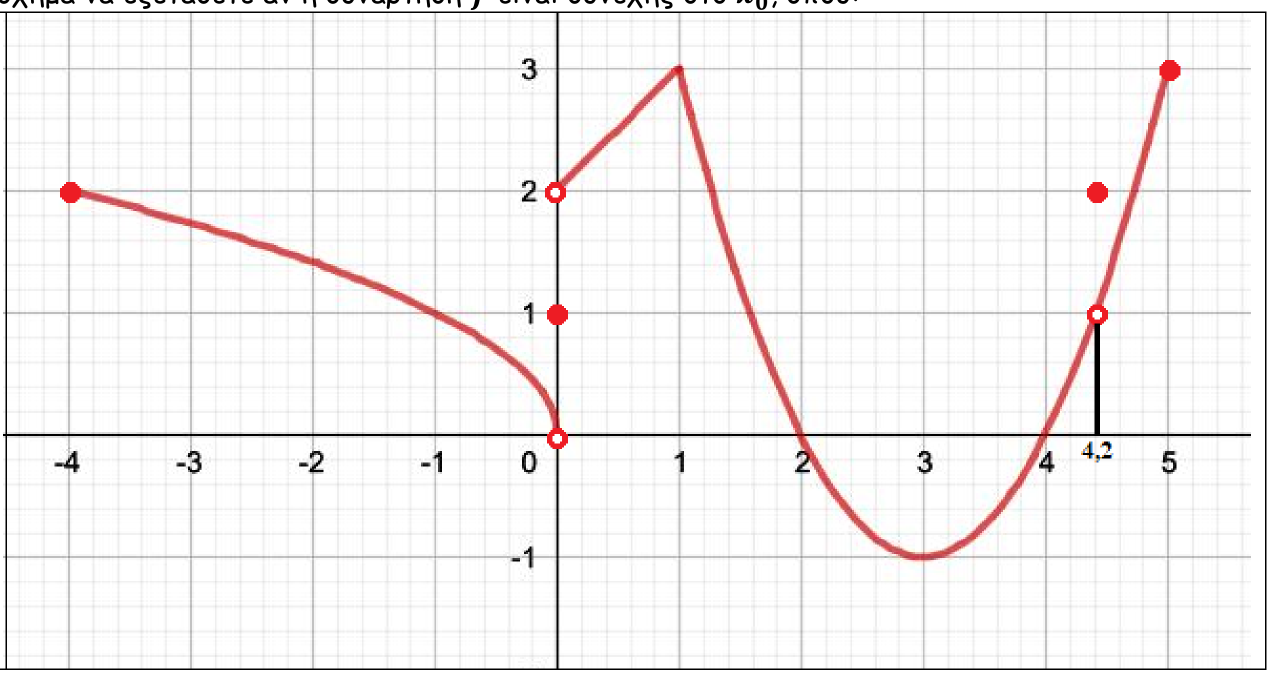
iii. $x_0 = 0$

iv. $x_0 = 1$

v. $x_0 = 3$

vi. $x_0 = 4{,}2$

vii. $x_0 = 5$



3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Αν $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -3$ και f συνεχής συνάρτηση τότε $f(5) = -3$

ii. Αν $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 7$ τότε $f(-2) = 7$

iii. Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 4$ και $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) - 4) = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο 0.

iv. Αν f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$ τότε $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h) = -3$.

v. Αν $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \alpha$, $f(2) = \beta$ και f είναι συνεχής στο 2 τότε $\alpha = \beta$

vi. Αν $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$ τότε η f είναι συνεχής στο -1.

vii. Αν η f είναι συνεχής στο 2 και η g είναι συνεχής στο 2 τότε και

a. η $f+g$ είναι συνεχής στο 2

b. η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο 2

c. η $3f - f\cdot g$ είναι συνεχής στο 2

viii. Αν $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ και $f(-1) = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο -1

4. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

i. Έστω η συνάρτηση f. Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν:

a. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$ _______

b. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] =$ _______

c. $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) =$ _______

d.

ii. Αν f συνεχής συνάρτηση και $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 2019$ τότε $f(2) =$ ________

iii. Αν f συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση, και $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζα τον αριθμό _______

iv. Αν f συνεχής συνάρτηση και $f(x) = \begin{cases} g(x), x \neq 3 \\ -2 \quad x = 3 \end{cases}$ τότε $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ________

v. Αν f συνεχής συνάρτηση και $f(x) = \begin{cases} g(x), x < 0 \\ 4 \quad , x = 0 \\ h(x), x > 0 \end{cases}$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ________

vi. Αν f συνεχής συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} g(x), x \neq 0 \\ a \quad x = 0 \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$ τότε $a =$ ________

vii. Αν f συνεχής συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} g(x), x < -1 \\ c \quad , x = -1 \\ h(x), x > -1 \end{cases}$ και $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$ τότε $c =$ ________

viii. Αν f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $\Delta = [\alpha, +\infty)$ και $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = 1$ τότε $f(\alpha) =$ ________

5. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο 0 με $(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2 \leq x^2 f(x) \leq x^4$. Να βρείτε το $f(0)$

6. Αν η f είναι συνεχής στο 0 και $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 3x}{x^2 + x} = 2$ να υπολογίσετε το $f(0)$.

7. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \boldsymbol{ax-\beta} & \boldsymbol{,x \leq 1} \\ \boldsymbol{3x} & \boldsymbol{,1 < x \leq 2} \\ \boldsymbol{\beta x^2 - a} & \boldsymbol{,x > 2} \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε η $\boldsymbol{f}$ να είναι

i. συνεχής στο 1 και στο 2.

ii. συνεχής στο 1 και ασυνεχής στο 2.

8. Αν $\boldsymbol{f}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3f(x)+2}{\sqrt{x}-2} = 3}$ να βρεθεί το $\boldsymbol{f(4)}$.

9. Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3ae^{x+1}+x} & \boldsymbol{,x \leq 1} \\ \boldsymbol{2x^2 - ax + 3\beta} & \boldsymbol{,-1 < x < 0} \\ \boldsymbol{\beta\eta\mu x + a\sigma\upsilon\nu x + 1} & \boldsymbol{,x \geq 0} \end{cases}$. Να βρεθούν οι τιμές των α και β ώστε η $\boldsymbol{f}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{3x^2 - (\lambda^3+1)x + 1, x \leq 1} \\ \boldsymbol{2x^3 - (\lambda^2+\mu)x + \lambda, x > 1} \end{cases}$. Να βρεθούν τα λ και τα μ ώστε η $\boldsymbol{f}$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η C_f να διέρχεται από το σημείο Α(2,15).

11. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $|f(x)| < |x|$ και η συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δειχθεί ότι $f(0) = 0$.

12. Αν $\boldsymbol{f}$ συνεχής και γνησίως μονότονη στο διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$ να βρείτε το σύνολο τιμών $\boldsymbol{f(\Delta)}$ σε κάθε περίπτωση:

Μονοτονία της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{\Delta}$	διάστημα $\boldsymbol{\Delta}$	σύνολο τιμών $\boldsymbol{f(\Delta)}$
$\boldsymbol{f}$ γνησίως αύξουσα	$\boldsymbol{\Delta = [3,7]}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = (3,7)}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = [3,7)}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = (3,7]}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
$\boldsymbol{f}$ γνησίως φθίνουσα	$\boldsymbol{\Delta = [-2,5]}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = [-2,5)}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = (-2,5]}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$
	$\boldsymbol{\Delta = (-2,5)}$	$\boldsymbol{f(\Delta) =}$