

1. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i. $g(x) = \ln|f(x)|$

ii. $g(x) = \varepsilon\phi(f(x))$

iii. $g(x) = \eta\mu(f(x))$

iv. $g(x) = e^{f(x)}$

v. $g(x) = \ln(f(x))$

vi. $g(x) = \sigma\upsilon\nu(f(x))$

vii. $g(x) = a^{f(x)}$

viii. $g(x) = \sqrt{f(x)}$

ix. $g(x) = (f(x))^v$

x. $g(x) = \sigma\phi(f(x))$

xi. $g(x) = (f(x))^x$

xii. $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

2. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i. $g(x) = f(e^{h(x)})$

ii. $g(x) = f(\ln(h(x)))$

iii. $g(x) = h(x) \cdot e^{f(x)}$

iv. $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$

v. $g(x) = \eta\mu^k(f(x))$

vi. $g(x) = \eta\mu(f(\sigma\upsilon\nu x))$

vii. $g(x) = \frac{\ln(f(x))}{e^{f(x)}}$

viii. $g(x) = \log_a(f(x))$

ix. $g(x) = \varepsilon\phi[\ln(f(x))]$

3. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i. $f(x) = g(\eta\mu x)$

ii. $f(x) = g(\ln x)$

iii. $f(x) = g(\sigma\upsilon\nu x)$

iv. $f(x) = g(\sigma\phi x)$

v. $f(x) = g(\sqrt{x})$

vi. $f(x) = g(\varepsilon\phi x)$

vii. $f(x) = g(e^x)$

viii. $f(x) = g(x^v)$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων

i. $f(x) = e^x \eta\mu x$

ii. $f(x) = \ln^5(4x + 8)$

iii. $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-3}\right)^4$

iv. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}$

v. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3(3x^3 - 2)^2$

vi. $f(x) = e^{2x} \eta\mu(x-1) \ln x$

vii. $f(x) = (2x^2 - 7x + 1)^6$

viii. $f(x) = \frac{(3x^2-7x) \ln x}{e^x}$

5. Να βρεθεί μια συνάρτηση f που έχει παράγωγο την παρακάτω συνάρτηση δηλ. $f'(x) = g(x)$:

i. $g(x) = 1$

ii. $g(x) = 0$

iii. $g(x) = 5x^4$

iv. $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

v. $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

vi. $g(x) = \frac{1}{x}$

vii. $g(x) = e^x$

viii. $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$

ix. $g(x) = -\eta\mu x$

6. Να βρεθεί μια συνάρτηση h που έχει παράγωγο την παρακάτω συνάρτηση δηλ. $h'(x) = g(x)$:

i. $g(x) = f'(x)$

ii. $g(x) = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$

iii. $g(x) = -\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$

iv. $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

v. $g(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

vi. $g(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

vii. $g(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$

viii. $g(x) = 4f^3(x) \cdot f'(x)$

ix. $g(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

7. Αν $g(0) = 1$ και $f'(0) = 2$ να βρεθεί η $g'(0)$ αν $g(x) = 2f(x) + \frac{x^2}{3f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = -7$ και f συνεχής στο $x_0 = 3$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$.

9. Αν η $f(x) = |x-5| \cdot g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 5$ και η g συνεχής στο $x_0 = 5$ τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει ρίζα το 5.

10. Ναδειχθεί ότι η $f(x) = \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

11. Αν $|f(x)| \leq |g(x)|, x \in R$ και $g(0) = g'(0) = 0$ ναδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

12. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε:

i. Να αποδειχθεί ότι: $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

ii. Αν $g(x) = x^3$ να υπολογιστεί το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1-h)}{2h}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Να βρεθούν:

i. $f'(f(x))$

ii. $(f \circ f)'(x)$

iii. $f(f'(x))$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1+x}$. Να βρεθούν:

i. $f'(f(x))$

ii. $(f \circ f)'(x)$

iii. $f(f'(x))$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + 3$. Να βρεθεί ο a ώστε $(f \circ f \circ f)'(x) = 8, x \in R$.

16. Αν για την συνάρτηση $g(x)$ ισχύουν $g(-1) = 3, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-3}{x+1} = 2$ τότε να βρεθεί το $f'(-1)$ αν $f(x) = (x^2 + 3x + 1)g(x)$.

17. Αφού βρεθούν τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων να υπολογιστούν οι παράγωγοί τους στα πεδία ορισμού τους.

i. $f(x) = \sqrt{x}$

ii. $f(x) = \sqrt{x-a}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2}$

iv. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

v. $f(x) = |x|$

vi. $f(x) = |x-a|$

vii. $f(x) = |x^2|$

viii. $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

18. Αν $f(x) = \begin{cases} e^x & , x > 0 \\ \lambda & , x = 0 \\ ax^2 + \beta x + \gamma & , x < 0 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $a, \beta, \gamma, \lambda$ αν η f έχει δεύτερη παράγωγο.

19. Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $[P(x)]^2 = P(x), x \in R$.

20. Αν $f'(x) = f(x), x \in R$ τότε ναδειχθεί ότι $f(x) = c \cdot e^x$ (και αντίστροφα)

21. Να βρεθούν οι v -οστές παράγωγοι των συναρτήσεων:

i. $f(x) = e^x + e^{2x} + e^{3x}$

ii. $f(x) = \ln x$

iii. $f(x) = \eta \mu x$

iv. $f(x) = \sin x$

22. Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Αν η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $g(0) = g'(0) = 0$ και $g''(0) = 4$ να βρεθεί το $f'(0)$.

23. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα

i. $S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + vx^{v-1}$

ii. $S_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + \dots + v \cdot (v-1)x^{v-2}$

iii. $S_3 = 1 + 2\eta \mu x + 3\eta \mu^2 x + \dots + v\eta \mu^{v-1} x$

iv. $S_4 = 2x + 4x^3 + \dots + 2vx^{2v-1}$

24. Αν $f(x) = e^{4x} + 2e^{-x}$, να δειχθεί ότι: $f'''(x) - 13f'(x) - 12f(x) = 0$.
25. Αν $y = \eta\mu(\ln x)$, να δειχθεί ότι: $x^2y'' + xy' + y = 0$.
26. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: R^* \rightarrow R$ με $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2-3}{x^2}$. Να δειχθεί ότι $f'(2) = -12$.
27. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων
- i. $y = f^5(\eta\mu^2 5x)$ ii. $y = \ln^3(f^2(x) + 1)$ iii. $y = \frac{f(5x)}{2+f^2(3x)}$
28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R , να δειχθεί ότι:
- i. Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή.
ii. Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.
29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \ln x$. Να βρεθούν τα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης C_f της f , στα οποία η εφαπτόμενη (ε) της C_f στο A :
- i. Είναι παράλληλη στη ευθεία $\zeta: ex - y + 1 = 0$.
ii. Είναι κάθετη στη ευθεία $\zeta: x - e^2y + 1 = 0$.
iii. Σχηματίζει γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.
iv. Διέρχεται από το σημείο $B(0, e)$.
30. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g(0) = e - 1$ και $g(x) > 0$ για κάθε $x \in R$. Αν $f(x) = (1 + g(x))^x$ να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο $A(0, f(0))$ εφαπτόμενη που σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα $x'x$.
31. Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow R$ με $f(x^2) = x^5$. Να δειχθεί ότι $f'(4) = 20$.
32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x + 6$ και $g(x) = -x^2 + \lambda x + 1$. Να βρεθούν τα $\lambda \in R$ για τα οποία η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(2,6)$ εφάπτεται και στη C_g .
33. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in [0, 2\pi]$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη προς την ευθεία $\varepsilon: x + y - \sqrt{2} = 0$, σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E = \frac{\pi^2}{8}$ τ.μ.
34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$. Αν $f(\rho) = f'(\rho) = 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός ρ είναι διπλή ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να τον προσδιορίσετε.
35. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 με $g(x_0) \neq 0$ και $g'(x_0) \neq 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, με $F'(x_0) = 0$. Δείξτε ότι $F'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$. Να βρεθούν τα a, β, γ όταν η κλίση της C_f στο $(-1, -1)$ είναι 3 και $\gamma = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\eta\mu \frac{1}{x}$.
37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x^2$.
- i. Δείξτε ότι τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτόμενη διέρχεται από την αρχή των αξόνων, βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -1$.
ii. Αν η ευθεία (ε) διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει την C_f σε δύο σημεία $A(a, f(a)), B(\beta, f(\beta))$ δείξτε ότι $|a|^\beta = |\beta|^a$.