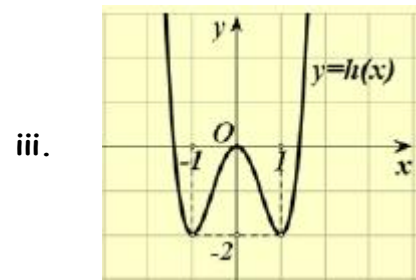
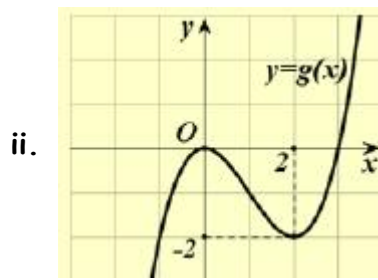
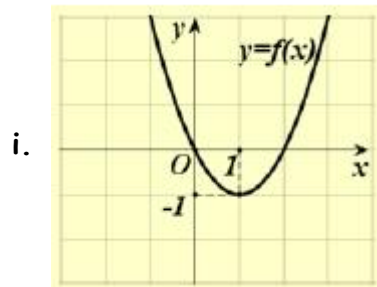
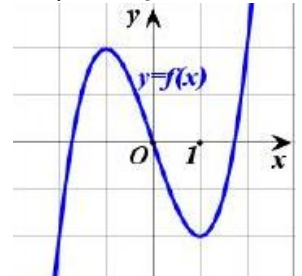
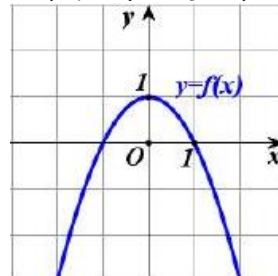
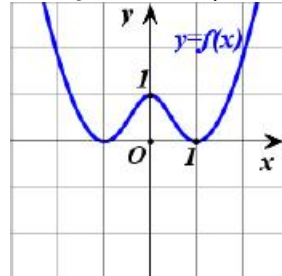
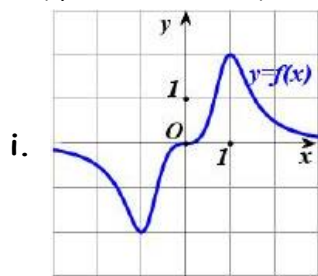


1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας στις παρακάτω συναρτήσεις:



2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα (αν υπάρχουν) στις παρακάτω συναρτήσεις:



3. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει τον άξονα  $x'x$  η  $C_f$ , αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει, η  $C_f$ , την ευθεία  $y=10$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει, η  $C_f$ , την ευθεία  $y=-3$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , σε πόσα σημεία μπορεί να τέμνει, η  $C_f$ , την ευθεία  $y=0$ ;

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Αν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $f(x)=0$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $f(x)=7$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $f(x)=-1$ ;
- Αν η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$ , πόσες ρίζες έχει η εξίσωση  $f(x)=4$ ;

5. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Αν  $f(2) = 13$  και  $f(0)=25$  να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- Αν  $f(a) = a^2$  και  $f(a+1)=a^2+2$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- Αν  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$  και  $f(\sqrt{3})=1$  να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- Αν  $C_f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(-2,7)$  και  $B(-5,6)$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- Αν  $f(0)<0$  και η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών  $y=3$  και  $x=1$ , να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Αν  $f \uparrow$  στο  $(-\infty, 3]$  και  $f \downarrow$  στο  $[3, +\infty)$  να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x=3$ .
- Αν  $f \downarrow$  στο  $(-\infty, -2]$  και  $f \uparrow$  στο  $[-2, +\infty)$  να αποδείξετε ότι η  $f(-2)$  είναι το ελάχιστο της συνάρτησης.
- Αν  $f \downarrow$  στο  $(-\infty, -3]$ ,  $f \uparrow$  στο  $[-3, +5]$  και  $f \downarrow$  στο  $[5, +\infty)$  να αποδείξετε ότι η  $f(-3)$  είναι το ελάχιστο και το  $f(5)$  είναι το μέγιστο της συνάρτησης.

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Αν  $f \uparrow \forall x \leq 0$ ,  $f \downarrow \forall x \geq 0$  και  $f(0)=-5$  να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο  $A(0,-5)$ .
- Αν  $f \downarrow \forall x \leq 2$ ,  $f \uparrow \forall x \geq 2$  και  $f(2)=3$  να αποδείξετε ότι η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο  $A(2,3)$ .

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A = [-6, 13]$ . Στις παρακάτω περιπτώσεις και με βάση το σύνολο τιμών και την μονοτονία της  $f$ , που δίνονται, να βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της  $f$  καθώς και τις θέσεις που αυτά παρουσιάζονται:
- Αν  $f(A) = [-3, 12]$  και  $f \downarrow$  στο  $A$ .
  - Αν  $f(A) = [2, e]$  και  $f \uparrow$  στο  $A$ .
  - Αν  $f(A) = [-5, 5]$  και  $f \downarrow$  στο  $A$ .
  - Αν  $f(A) = [e, \pi]$  και  $f \uparrow$  στο  $A$ .
9. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως φθίνουσα τότε η αντίθετή της  $-f$ , είναι γνησίως αύξουσα.
10. Να αποδείξετε ότι, αν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι γνησίως αύξουσα και έχει ρίζα το  $-6$  τότε ισχύει  $f(0) > 0$ .
11. Να αποδείξετε ότι, αν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  έχει μέγιστη τιμή το  $1$  τότε η εξίσωση  $f(x) = 2$  είναι αδύνατη.
12. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^{11} + 8x - 8$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .
- Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.
  - Λύστε την ανίσωση:  $f(f(x)) < 1$ .
13. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x - e^{-x} + x + 1$ .
- Να δειχθεί ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
  - Να βρεθεί το σύνολο τιμών της  $f$ .
  - Να δειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα  $x_0 \in D_f$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .