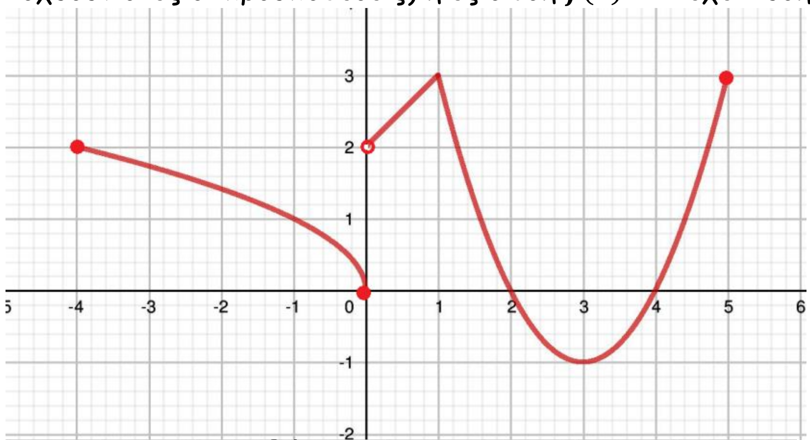
1. Να συμπληρώσετε δίπλα σε κάθε γραφική παράσταση ποια ή ποιες από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano ισχύουν και ποιες δεν ισχύουν επιλέγοντας ΝΑΙ ή ΟΧΙ αντίστοιχα. Σε ποιες περιπτώσεις (παρότι δεν ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις) η εξίσωση $\boldsymbol{f(x)=0}$ έχει λύση και πόσες λύσεις έχει;

i.



Προϋποθέσεις

- $\boldsymbol{f}$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f}$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f(\alpha)\cdot f(\beta)<0}$ ΝΑΙ - ΟΧΙ

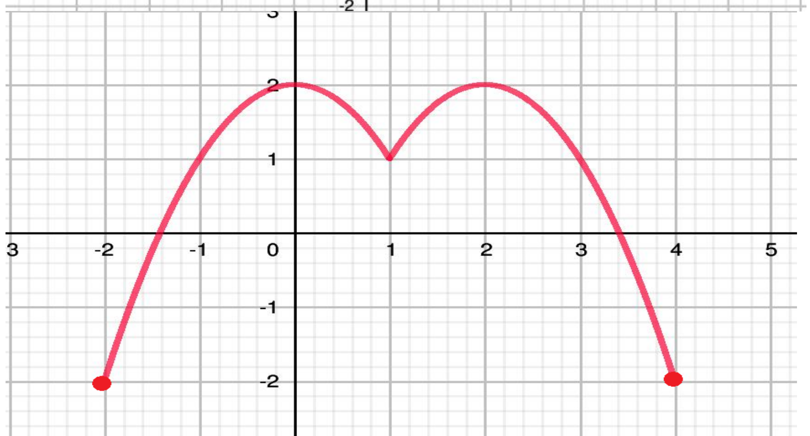
Συμπέρασμα

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση;

ΝΑΙ πλήθος λύσεων:_______

ΟΧΙ πλήθος λύσεων:0

ii.



Προϋποθέσεις

- $\boldsymbol{f}$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f}$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f(\alpha)\cdot f(\beta)<0}$ ΝΑΙ - ΟΧΙ

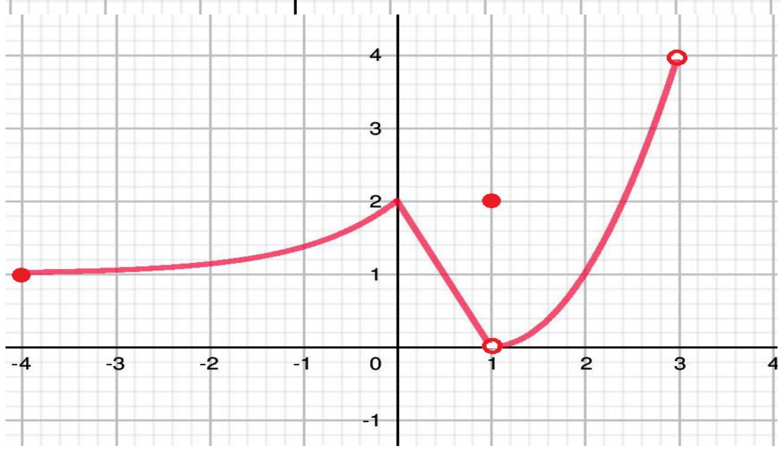
Συμπέρασμα

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση;

ΝΑΙ πλήθος λύσεων:_______

ΟΧΙ πλήθος λύσεων:0

iii.



Προϋποθέσεις

- $\boldsymbol{f}$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f}$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f(\alpha)\cdot f(\beta)<0}$ ΝΑΙ - ΟΧΙ

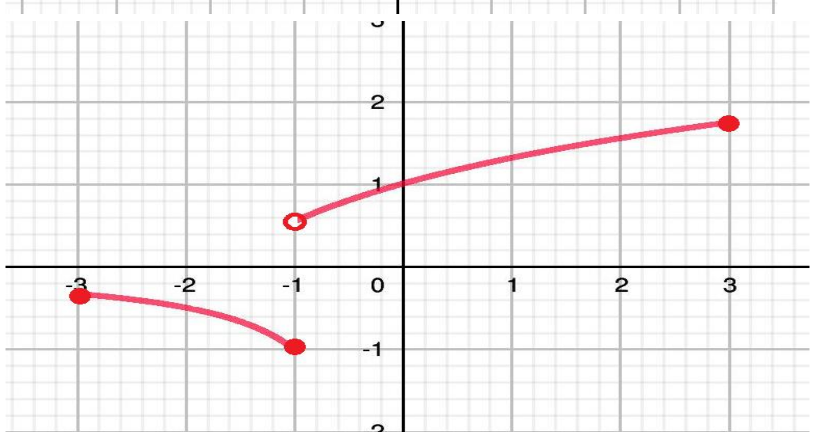
Συμπέρασμα

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση;

ΝΑΙ πλήθος λύσεων:_______

ΟΧΙ πλήθος λύσεων:0

iv.



Προϋποθέσεις

- $\boldsymbol{f}$ ορισμένη σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f}$ συνεχής σε κλειστό διάστημα [α,β] ΝΑΙ - ΟΧΙ
- $\boldsymbol{f(\alpha)\cdot f(\beta)<0}$ ΝΑΙ - ΟΧΙ

Συμπέρασμα

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση;

ΝΑΙ πλήθος λύσεων:_______

ΟΧΙ πλήθος λύσεων:0

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

i. Αν $f(0)=3,\ f(-2)=-1$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (-2,0)

ii. Αν $f(2)=6$ και $f(5)=-7$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (2,5)

iii. Αν $f(-1)=3,\ f(1)=1$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=2$ έχει λύση στο (-1,1)

iv. Αν $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=-3,\ f(8)=1$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (5,8)

v. Αν $f(2)=6$,$f(3)=7$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ **δεν** μπορεί να έχει λύση στο (2,3)

vi. Αν $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to 3} f(x)=13$και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (-3,3)

vii. Αν $f(3)=-1$,$f(4)=1$ και f ορισμένη και συνεχής στο $[3,4]$ τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει λύση στο (-1,1).

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μια τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα *Δ*:

i. $e^x-x^3+2x-3=0$ και $\Delta=(0,1)$ ii. $x^4+5x^3-x^2+x-1=0$ και $\Delta=(0,1)$

iii. $4x+\pi\eta\mu x=2\pi$ και $\Delta=\mathbb{R}$ iv. $x^3+\kappa x+\lambda=0$,λ>0 & κ+λ+1<0και $\Delta=(-1,1)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\beta+3)x+3\beta+1}{1-\beta}, & x<-1\\ -x^2+a & ,-1\le x<1\\ -ax-3 & , \quad x\ge 1\end{cases}$. Να βρεθούν τα $a,\beta\in R$ ώστε να ισχύει το θεώρημα Bolzano για την f στο $\left[-2,\dfrac{3}{2}\right]$.

5. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:[a,\beta]\to R$. Αν $f(a)\neq f(\beta)$ και $\kappa,\lambda\in R$ με $\kappa,\lambda>0$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $\kappa f(a)+\lambda f(\beta)=(\kappa+\lambda)f(\xi)$

6. Έστω η συνάρτηση $f:[0,1]\to[0,1]$, συνεχής στο [0,1]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε f(ξ)=ξ.

7. Αν η συνάρτηση $f:[a,\beta]\to R$ είναι συνεχής στο [α,β] και $f(x)\neq 0, \forall x\in[a,\beta]$ να δειχθεί ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β].

8. Αν η f με πεδίο ορισμού το [-1,4] είναι συνεχής στο [-1,4] και f(0) = 1, f(1) = -2, f(2) = 1/2, f(3) = -3 να βρεθεί πόσες φορές τουλάχιστον τέμνει τον $x'x$.

9. Αν το σημείο Μ(α,β) ανήκει στον κύκλο $(x-2)^2+y^2=1$, να δείξτε ότι η εξίσωση $3(a-2)^2x^2+2\beta^2x-1=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

10. Εστω η συνάρτηση $f:[a,\beta]\to R$ συνεχής με f(α)=f(β). Να δειχθεί ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in[a,\beta]$ με $2|x_1-x_2|=\beta-a$, ώστε να ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

11. Αν f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και $0 \le f(x) \le 1 \ \forall \ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε ;υπάρχει $\xi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \eta\mu\xi$.

12. Έστω $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2-1}$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{\eta\mu\xi}{\xi^2-1}$.

13. Αν f συνεχής στο $[0,2a]$ με $f(0) = f(2a)$ τότε να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [0,a]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f(\xi + a)$.

14. Αν f, g ορισμένες και συνεχείς σε διάστημα Δ. Έστω ότι $f(x) - g(x) = cx$ για κάθε $x \in \Delta$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει 2 ρίζες ετερόσημες στο Δ τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

15. Αν f ορισμένη και συνεχής στο $\Delta = [0,2]$ και $f(\Delta) = \Delta$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 4x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2]$ ή στο $[0,2)$.

16. Να δειχθεί ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο R.

17. Δίνεται η συνάρτηση $\begin{cases} x^2+2 & ,-2 \le x < 0 \\ -x^2-2 & ,0 \le x \le 2 \end{cases}$. Να εξεταστεί αν υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

18. Αν μια συνάρτηση f:[α,β]→[α,β] με f(α) ≥ α και f(β) ≤ β είναι συνεχής, τότε υπάρχει γ ϵ [α,β] τέτοιο ώστε f(γ) = γ.

19. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις f,g:[α,β]→[α,β]. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει x_0 ϵ [α,β] ώστε (f o g)(x_0) + (g o f)(x_0) = 2x_0

20. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f(x)=x^3 +x^2 και g(x)=5x-3 τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 ϵ (-4, -2).

21. Οι συναρτήσεις f,g:[2,4] → [2,4] είναι συνεχείς. Αν f(2)=2 ,g(4)=4 να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας ξ ϵ [2,4], τέτοιος ώστε: 3f(ξ)+5g(ξ)=8ξ.

22. Αν β>0 και α+β+1<0 να αποδείξετε ότι η εξίσωση x^3 +αx^2 +β=0 ,έχει δυο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (-1 ,1).

23. Η συνάρτηση f:[1,2] → R είναι συνεχής και ¨1-1¨ με f(1)+f(2)=0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας ξ ϵ (1,2) τέτοιος ώστε f(ξ)=0.